Anhang

Eigenschaften von Markov-Ketten

- **Irreduzibilität:** Von jedem Zustand kann man jeden anderen erreichen

Eigenschaften von Markov-Ketten

- **Irreduzibilität:** Von jedem Zustand kann man jeden anderen erreichen
- **Aperiodizität:** Rückkehr zu einem Zustand nicht nur in festen Zeitabständen

Eigenschaften von Markov-Ketten

- **Irreduzibilität:** Von jedem Zustand kann man jeden anderen erreichen
- **Aperiodizität:** Rückkehr zu einem Zustand nicht nur in festen Zeitabständen
- **Absorbierende Zustände:** Zustände, die nicht mehr verlassen werden

Eigenschaften von Markov-Ketten

- **Irreduzibilität:** Von jedem Zustand kann man jeden anderen erreichen
- **Aperiodizität:** Rückkehr zu einem Zustand nicht nur in festen Zeitabständen
- **Absorbierende Zustände:** Zustände, die nicht mehr verlassen werden
- **Rekurrenz:** Wahrscheinlichkeit, wieder in einen Zustand zurückzukehren

Eigenschaften von Markov-Ketten

- **Irreduzibilität:** Von jedem Zustand kann man jeden anderen erreichen
- **Aperiodizität:** Rückkehr zu einem Zustand nicht nur in festen Zeitabständen
- **Absorbierende Zustände:** Zustände, die nicht mehr verlassen werden
- **Rekurrenz:** Wahrscheinlichkeit, wieder in einen Zustand zurückzukehren
- **Transienz:** Zustände, die irgendwann nicht mehr erreicht werden

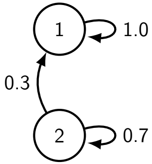
Eigenschaften von Markov-Ketten

- **Irreduzibilität:** Von jedem Zustand kann man jeden anderen erreichen
- **Aperiodizität:** Rückkehr zu einem Zustand nicht nur in festen Zeitabständen
- **Absorbierende Zustände:** Zustände, die nicht mehr verlassen werden
- **Rekurrenz:** Wahrscheinlichkeit, wieder in einen Zustand zurückzukehren
- **Transienz:** Zustände, die irgendwann nicht mehr erreicht werden
- **Ergodizität:** Positive Rekurrenz und Aperiodizität

Absorbierende Zustände

Beispiel:

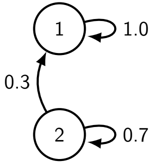
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$



Absorbierende Zustände

Beispiel:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$



- Zustand 1 ist **absorbierend**: $P_{1,1} = 1$
- Wenn die Kette in Zustand 1 ist, bleibt sie dort für immer
- Zustand 2 ist **transient**: Irgendwann wird er verlassen und nie wieder erreicht

Grenzen von Markov-Ketten

- **Markov-Eigenschaft:** Nicht immer realistisch, manchmal hängt die Zukunft von mehr als nur dem aktuellen Zustand ab

Grenzen von Markov-Ketten

- **Markov-Eigenschaft:** Nicht immer realistisch, manchmal hängt die Zukunft von mehr als nur dem aktuellen Zustand ab
- **Feste Übergangswahrscheinlichkeiten:** In der Realität können sich Wahrscheinlichkeiten ändern

Grenzen von Markov-Ketten

- **Markov-Eigenschaft:** Nicht immer realistisch, manchmal hängt die Zukunft von mehr als nur dem aktuellen Zustand ab
- **Feste Übergangswahrscheinlichkeiten:** In der Realität können sich Wahrscheinlichkeiten ändern
- **Komplexe Abhängigkeiten:** Können nicht abgebildet werden

Grenzen von Markov-Ketten

- **Markov-Eigenschaft:** Nicht immer realistisch, manchmal hängt die Zukunft von mehr als nur dem aktuellen Zustand ab
- **Feste Übergangswahrscheinlichkeiten:** In der Realität können sich Wahrscheinlichkeiten ändern
- **Komplexe Abhängigkeiten:** Können nicht abgebildet werden
- **Zustandsraum:** Bei vielen Zuständen wird die Berechnung aufwändig

Grenzen von Markov-Ketten

- **Markov-Eigenschaft:** Nicht immer realistisch, manchmal hängt die Zukunft von mehr als nur dem aktuellen Zustand ab
- **Feste Übergangswahrscheinlichkeiten:** In der Realität können sich Wahrscheinlichkeiten ändern
- **Komplexe Abhängigkeiten:** Können nicht abgebildet werden
- **Zustandsraum:** Bei vielen Zuständen wird die Berechnung aufwändig
- **Keine Kausalität:** Beschreiben nur Wahrscheinlichkeiten, keine Ursachen

App-Nutzung: Stationäre Verteilung

Für die App-Nutzung: $P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$

1. Aus $\pi_1 = 0.7\pi_1 + 0.3\pi_2$ folgt $0.3\pi_1 = 0.3\pi_2 \rightarrow \pi_1 = \pi_2$

App-Nutzung: Stationäre Verteilung

Für die App-Nutzung: $P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$

1. Aus $\pi_1 = 0.7\pi_1 + 0.3\pi_2$ folgt $0.3\pi_1 = 0.3\pi_2 \to \pi_1 = \pi_2$
2. Mit $\pi_1 + \pi_2 = 1$ folgt $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$

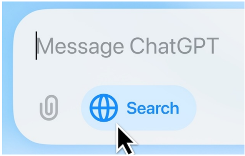
App-Nutzung: Stationäre Verteilung

Für die App-Nutzung: $P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$

1. Aus $\pi_1 = 0.7\pi_1 + 0.3\pi_2$ folgt $0.3\pi_1 = 0.3\pi_2 \to \pi_1 = \pi_2$
2. Mit $\pi_1 + \pi_2 = 1$ folgt $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$

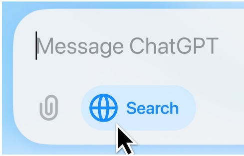
Langfristig werden beide Apps gleich häufig genutzt.

Anwendungen von Markov-Ketten



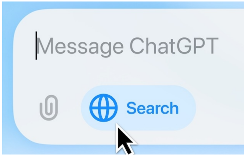
- **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen

Anwendungen von Markov-Ketten



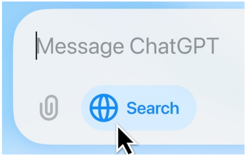
- **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- **Wettervorhersage**

Anwendungen von Markov-Ketten



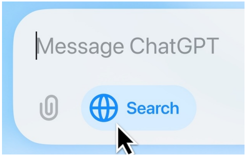
- **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- **Wettervorhersage**
- **PageRank-Algorithmus** von Google

Anwendungen von Markov-Ketten



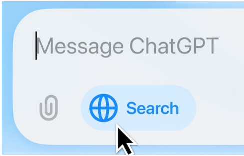
- **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- **Wettervorhersage**
- **PageRank-Algorithmus** von Google
- **Biologische Systeme** (Gensequenzen)

Anwendungen von Markov-Ketten



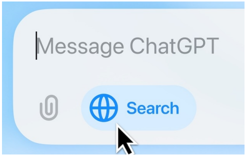
- **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- **Wettervorhersage**
- **PageRank-Algorithmus** von Google
- **Biologische Systeme** (Gensequenzen)
- **Finanzmodelle** (Aktienkurse)

Anwendungen von Markov-Ketten



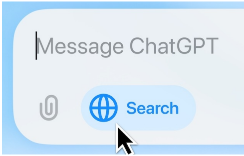
- **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- **Wettervorhersage**
- **PageRank-Algorithmus** von Google
- **Biologische Systeme** (Gensequenzen)
- **Finanzmodelle** (Aktienkurse)
- **Verkehrssimulationen**

Anwendungen von Markov-Ketten



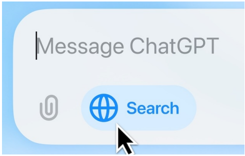
- **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- **Wettervorhersage**
- **PageRank-Algorithmus** von Google
- **Biologische Systeme** (Gensequenzen)
- **Finanzmodelle** (Aktienkurse)
- **Verkehrssimulationen**
- **Warteschlangensysteme**

Anwendungen von Markov-Ketten



- **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- **Wettervorhersage**
- **PageRank-Algorithmus** von Google
- **Biologische Systeme** (Gensequenzen)
- **Finanzmodelle** (Aktienkurse)
- **Verkehrssimulationen**
- **Warteschlangensysteme**
- **Spieltheorie** (Entscheidungsprozesse)

Anwendungen von Markov-Ketten



- **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- **Wettervorhersage**
- **PageRank-Algorithmus** von Google
- **Biologische Systeme** (Gensequenzen)
- **Finanzmodelle** (Aktienkurse)
- **Verkehrssimulationen**
- **Warteschlangensysteme**
- **Spieltheorie** (Entscheidungsprozesse)
- ...

Textvorhersage mit Markov-Ketten

- Markov-Ketten können genutzt werden, um **Texte zu generieren**.

Beispiel:

„Ich mag Pizza und ich mag Pasta."

Textvorhersage mit Markov-Ketten

- Markov-Ketten können genutzt werden, um **Texte zu generieren**.
- Die Idee: Jedes Wort (oder Zeichen) ist ein Zustand.

Beispiel:

„Ich mag Pizza und ich mag Pasta.“

Textvorhersage mit Markov-Ketten

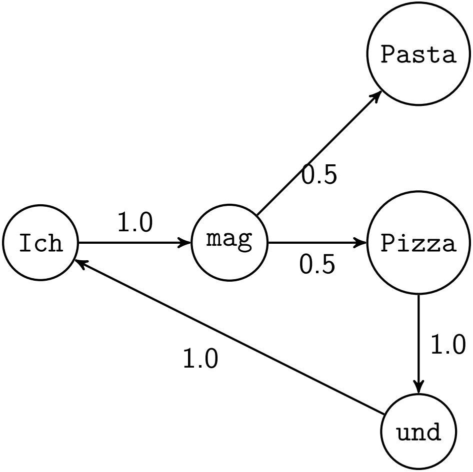
- Markov-Ketten können genutzt werden, um **Texte zu generieren**.
- Die Idee: Jedes Wort (oder Zeichen) ist ein Zustand.
- Die Wahrscheinlichkeit für das nächste Wort hängt nur vom aktuellen Wort ab.

Beispiel:

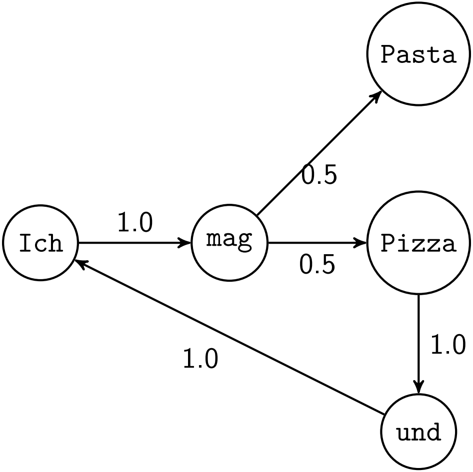
„Ich mag Pizza und ich mag Pasta."

- Übergänge (vereinfacht):
  `Ich` → `mag` → `Pizza` → `und` → `ich` → `mag` → `Pasta`

Visualisierung: Markov-Kette für Text



Visualisierung: Markov-Kette für Text



- Jeder Pfeil steht für eine mögliche Fortsetzung im Text.
- Die Wahrscheinlichkeiten werden aus Beispielsätzen gezählt.

Kurze Textgenerierung (Beispiel)

- Start: `Ich`

Mögliche generierte Sätze:

```
Ich mag Pizza und ich mag Pasta.
Ich mag Pasta.
```

Kurze Textgenerierung (Beispiel)

- Start: `Ich`
- Nächstes Wort: `mag`

Mögliche generierte Sätze:

```
Ich mag Pizza und ich mag Pasta.
Ich mag Pasta.
```

Kurze Textgenerierung (Beispiel)

- Start: `Ich`
- Nächstes Wort: `mag`
- Danach: zufällig `Pizza` oder `Pasta`

Mögliche generierte Sätze:

```
Ich mag Pizza und ich mag Pasta.
Ich mag Pasta.
```

Kurze Textgenerierung (Beispiel)

- Start: `Ich`
- Nächstes Wort: `mag`
- Danach: zufällig `Pizza` oder `Pasta`
- usw.

Mögliche generierte Sätze:

```
Ich mag Pizza und ich mag Pasta.
Ich mag Pasta.
```

Kurze Textgenerierung (Beispiel)

- Start: `Ich`
- Nächstes Wort: `mag`
- Danach: zufällig `Pizza` oder `Pasta`
- usw.

Mögliche generierte Sätze:

```
Ich mag Pizza und ich mag Pasta.
Ich mag Pasta.
```

Markov-Ketten können einfache, aber oft überraschende Texte erzeugen!

- Text-Generierung mit Markov-Ketten
- Challenge: 1.3

Lernkontrolle: Markov-Ketten für Text

Aufgabe 0.1

`Hallo Welt Info Hallo Info Welt Hallo Hallo Welt Info Info Welt Hallo`

1. Leiten Sie aus dem Text eine Übergangsmatrix für die Wörter `Hallo`, `Welt` und `Info` her.
2. Was ist der wahrscheinlichste Text mit 3 Wörtern, wenn Sie mit `Hallo` starten?

Hinweis: Überlegen Sie sich sinnvolle Übergangswahrscheinlichkeiten!

1. **Übergangszählung:**

	`Hallo`	`Welt`	`Info`
`Hallo` (5x)	1	2	1
`Welt` (4x)	2	0	2
`Info` (4x)	1	2	1

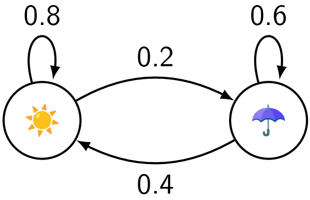
Übergangsmatrix:
Für jede Zeile normieren wir auf die Summe der Übergänge von diesem Wort:

$$P = \begin{pmatrix} & \texttt{Hallo} & \texttt{Welt} & \texttt{Info} \\ \texttt{Hallo} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \texttt{Welt} & \frac{2}{4} & 0 & \frac{2}{4} \\ \texttt{Info} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2. **Wahrscheinlichster Text mit 3 Wörtern, Start `Hallo`:**
Von `Hallo` aus ist der wahrscheinlichste Übergang zu `Welt` (2 von 4 Übergängen), danach von `Welt` zu `Hallo` oder `Info` (je 2 von 4 Übergängen).
   - `Hallo` → `Welt` (0.5), dann `Welt` → `Hallo` (0.5):
`Hallo Welt Hallo`
   - `Hallo` → `Welt` (0.5), dann `Welt` → `Info` (0.5):

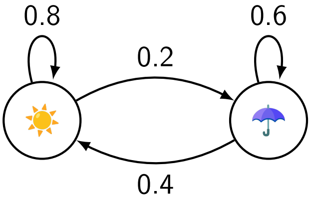
Visualisierung von Markov-Ketten

Markov-Ketten können als **gerichtete Graphen** dargestellt werden:



Visualisierung von Markov-Ketten

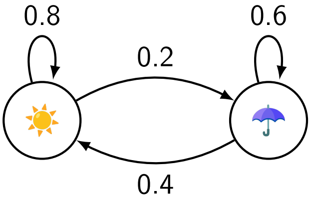
Markov-Ketten können als **gerichtete Graphen** dargestellt werden:



○ **Knoten** = Zustände

Visualisierung von Markov-Ketten

Markov-Ketten können als **gerichtete Graphen** dargestellt werden:

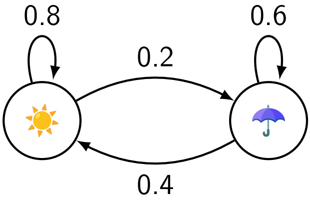


Knoten = Zustände

Kanten = Übergänge mit Wahrscheinlichkeiten

Visualisierung von Markov-Ketten

Markov-Ketten können als **gerichtete Graphen** dargestellt werden:

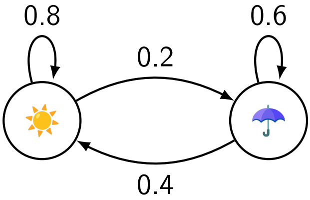


- ○ **Knoten** = Zustände
- → **Kanten** = Übergänge mit Wahrscheinlichkeiten

Summe der ausgehenden Kanten = 1!

Visualisierung von Markov-Ketten

Markov-Ketten können als **gerichtete Graphen** dargestellt werden:



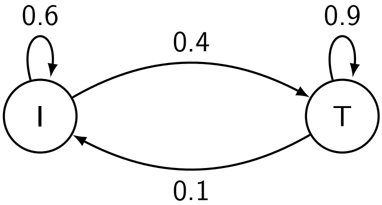
- ○ **Knoten** = Zustände
- → **Kanten** = Übergänge mit Wahrscheinlichkeiten

Summe der ausgehenden Kanten = 1!

Aufgabe 0.2

Jedes Mal, wenn Sie Instagram (**I**) benutzen, benutzen Sie als nächste App zu **60%** nochmals Instagram, und wechseln auf TikTok (**T**) mit **40%**. Wenn Sie zuerst TikTok benutzen, wechseln Sie zu **10%** zu Instagram und bleiben zu **90%** auf TikTok. Erstellen Sie den **gerichteten Graphen** für die Zustände **I** und **T**.

Gerichteter Graph: Social-Media-App-Nutzung



Gerichteter Graph für **Instagram (I)** und **TikTok (T)**

Stationäre Verteilung

Definition (Stationäre Verteilung)

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ heisst **stationäre Verteilung** einer Markov-Kette mit Übergangsmatrix P, wenn gilt:

$$\pi = \pi \cdot P$$

$\Rightarrow$ Langfristige, stabile Verteilung der Wahrscheinlichkeiten

Stationäre Verteilung

Definition (Stationäre Verteilung)

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ heisst **stationäre Verteilung** einer Markov-Kette mit Übergangsmatrix P, wenn gilt:

$$\pi = \pi \cdot P$$

⇒ Langfristige, stabile Verteilung der Wahrscheinlichkeiten

⇒ Bleibt nach Multiplikation mit P unverändert

Berechnung der stationären Verteilung (Wetter-Beispiel)

1. $\pi = \pi \cdot P$ aufstellen:

$$(\pi_{☀️}, \pi_{☂️}) = (\pi_{☀️}, \pi_{☂️}) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Berechnung der stationären Verteilung (Wetter-Beispiel)

1. $\pi = \pi \cdot P$ aufstellen:

$$(\pi_{☀️}, \pi_{☂️}) = (\pi_{☀️}, \pi_{☂️}) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

2. Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} \pi_{☀️} &= \pi_{☀️} \cdot 0.8 + \pi_{☂️} \cdot 0.4 \\ \pi_{☂️} &= \pi_{☀️} \cdot 0.2 + \pi_{☂️} \cdot 0.6 \end{aligned}$$

Berechnung der stationären Verteilung (Wetter-Beispiel)

1. $\pi = \pi \cdot P$ aufstellen:

$$(\pi_{☀}, \pi_{☂}) = (\pi_{☀}, \pi_{☂}) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

2. Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} \pi_{☀} &= \pi_{☀} \cdot 0.8 + \pi_{☂} \cdot 0.4 \\ \pi_{☂} &= \pi_{☀} \cdot 0.2 + \pi_{☂} \cdot 0.6 \end{aligned}$$

3. Umformen:

$$\pi_{☀} \cdot 0.2 = \pi_{☂} \cdot 0.4$$

$$\Rightarrow \pi_{☀} = 2 \cdot \pi_{☂}$$

Berechnung der stationären Verteilung (Wetter-Beispiel)

1. $\pi = \pi \cdot P$ aufstellen:

$$(\pi_{☀️}, \pi_{☂️}) = (\pi_{☀️}, \pi_{☂️}) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

2. Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} \pi_{☀️} &= \pi_{☀️} \cdot 0.8 + \pi_{☂️} \cdot 0.4 \\ \pi_{☂️} &= \pi_{☀️} \cdot 0.2 + \pi_{☂️} \cdot 0.6 \end{aligned}$$

3. Umformen:

$$\pi_{☀️} \cdot 0.2 = \pi_{☂️} \cdot 0.4$$
$$\Rightarrow \pi_{☀️} = 2 \cdot \pi_{☂️}$$

4. Normierung:

$$\begin{aligned} \pi_{☀️} + \pi_{☂️} &= 1 \\ 2 \cdot \pi_{☂️} + \pi_{☂️} &= 1 \\ 3 \cdot \pi_{☂️} &= 1 \\ \pi_{☂️} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Berechnung der stationären Verteilung (Wetter-Beispiel)

1. $\pi = \pi \cdot P$ aufstellen:

$$(\pi_{☀️}, \pi_{☂️}) = (\pi_{☀️}, \pi_{☂️}) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

2. Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} \pi_{☀️} &= \pi_{☀️} \cdot 0.8 + \pi_{☂️} \cdot 0.4 \\ \pi_{☂️} &= \pi_{☀️} \cdot 0.2 + \pi_{☂️} \cdot 0.6 \end{aligned}$$

3. Umformen:

$$\pi_{☀️} \cdot 0.2 = \pi_{☂️} \cdot 0.4$$
$$\Rightarrow \pi_{☀️} = 2 \cdot \pi_{☂️}$$

4. Normierung:

$$\begin{aligned} \pi_{☀️} + \pi_{☂️} &= 1 \\ 2 \cdot \pi_{☂️} + \pi_{☂️} &= 1 \\ 3 \cdot \pi_{☂️} &= 1 \\ \pi_{☂️} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

5. Ergebnis:

$$\pi_{☀️} = \frac{2}{3}$$
$$\pi_{☂️} = \frac{1}{3}$$

Berechnung der stationären Verteilung (Wetter-Beispiel)

1. $\pi = \pi \cdot P$ aufstellen:

$$(\pi_{☀}, \pi_{☂}) = (\pi_{☀}, \pi_{☂}) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

2. Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} \pi_{☀} &= \pi_{☀} \cdot 0.8 + \pi_{☂} \cdot 0.4 \\ \pi_{☂} &= \pi_{☀} \cdot 0.2 + \pi_{☂} \cdot 0.6 \end{aligned}$$

3. Umformen:

$$\begin{gathered} \pi_{☀} \cdot 0.2 = \pi_{☂} \cdot 0.4 \\ \Rightarrow \pi_{☀} = 2 \cdot \pi_{☂} \end{gathered}$$

4. Normierung:

$$\begin{aligned} \pi_{☀} + \pi_{☂} &= 1 \\ 2 \cdot \pi_{☂} + \pi_{☂} &= 1 \\ 3 \cdot \pi_{☂} &= 1 \\ \pi_{☂} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

5. Ergebnis:

$$\begin{aligned} \pi_{☀} &= \frac{2}{3} \\ \pi_{☂} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Langfristig ist es an 2/3 der Tage sonnig und an 1/3 der Tage regnerisch.**