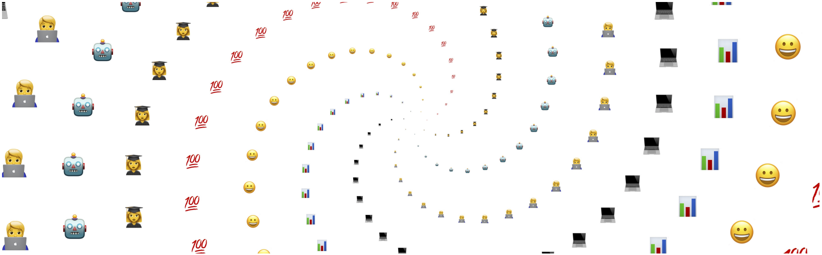
Daten Vorhersagen

Markov-Ketten

Cyril Wendl[1] Naoki Peter [2]

[1]Fachschaft Informatik
Kantonsschule im Lee

[2]Fachschaft Informatik
Kantonsschule Zürich-Nord



Themenübersicht

- ☑ Daten analysieren und visualisieren
- ☑ Zahlen vorhersagen (lineare Regression)
- **Zustände vorhersagen (Markov-Ketten)**

Anwendungen von Markov-Ketten

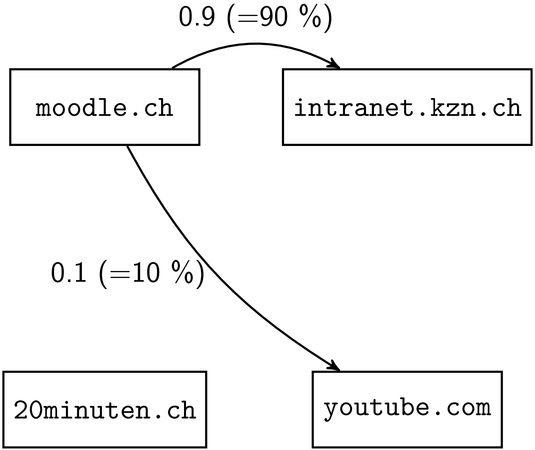
moodle.ch

intranet.kzn.ch

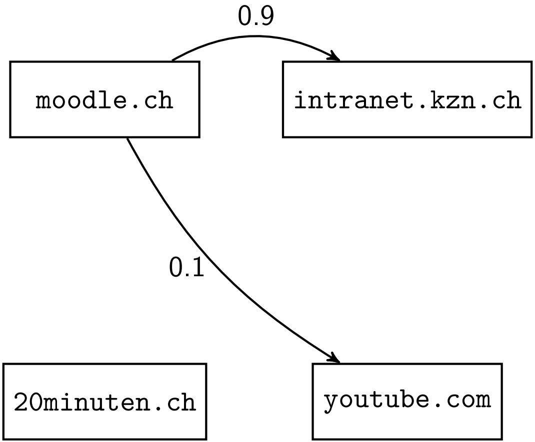
20minuten.ch

youtube.com

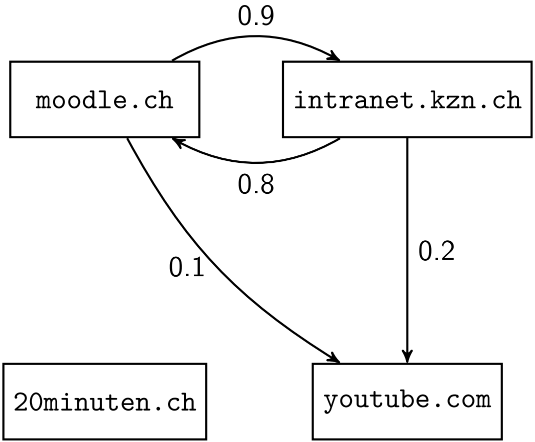
Anwendungen von Markov-Ketten



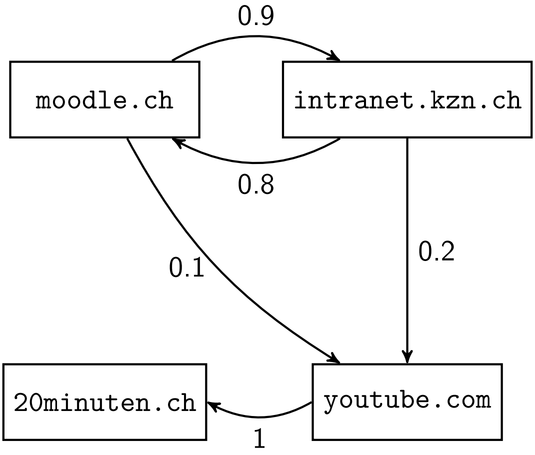
Anwendungen von Markov-Ketten



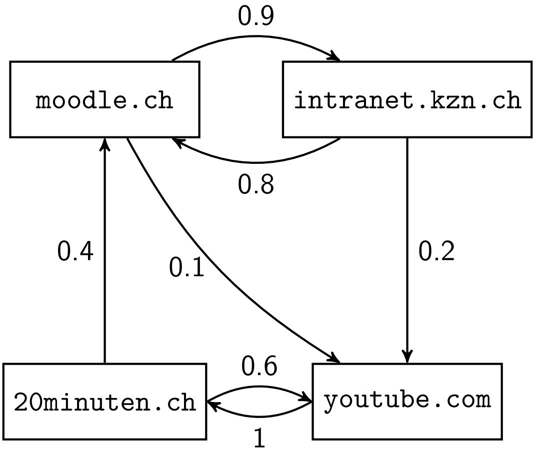
Anwendungen von Markov-Ketten



Anwendungen von Markov-Ketten



Anwendungen von Markov-Ketten



Wenn Sie jetzt auf `moodle.ch` sind, welche Webseite möchten Sie am wahrscheinlichsten als nächstes besuchen?

Lernziele

- Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.

Lernziele

- Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
- Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.

Lernziele

- Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
- Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.
- Ich kann aus einer realen Problemstellung eine **Übergangsmatrix** erstellen.

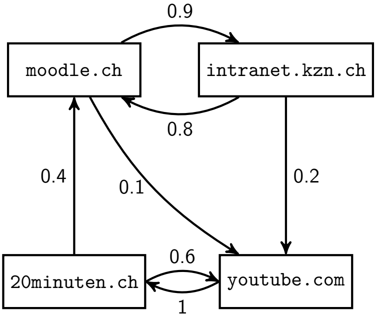
Lernziele

- Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
- Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.
- Ich kann aus einer realen Problemstellung eine **Übergangsmatrix** erstellen.
- Ich kann einen Zustand einer Markov-Kette mithilfe einer **Matrixmultiplikation** vorhersagen.

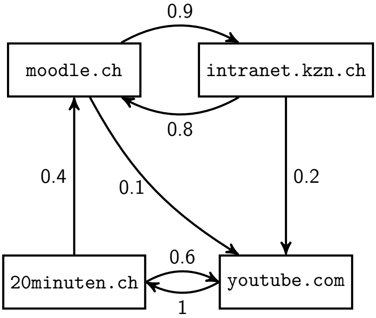
Zustände

Zustand: Beispiele

- Auf welcher Webseite befinde ich mich gerade?



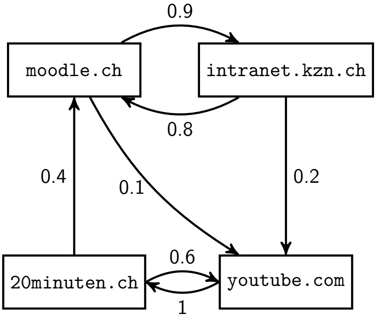
Zustände



Zustand: Beispiele

- Auf welcher Webseite befinde ich mich gerade?
- Andere Beispiele:

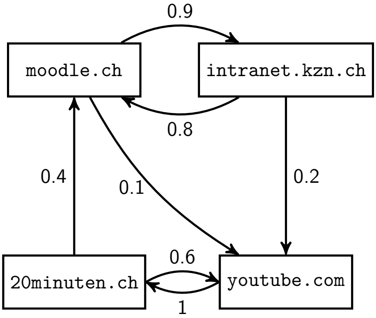
Zustände



Zustand: Beispiele

- Auf welcher Webseite befinde ich mich gerade?
- Andere Beispiele:
  - Wetter (sonnig, regnerisch)

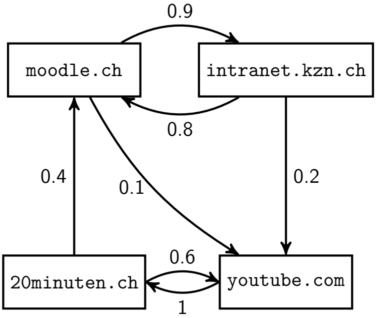
Zustände



Zustand: Beispiele

- Auf welcher Webseite befinde ich mich gerade?
- Andere Beispiele:
  - Wetter (sonnig, regnerisch)
  - Spielfigur auf einem Spielbrett (Feld 1, 2, 3...)

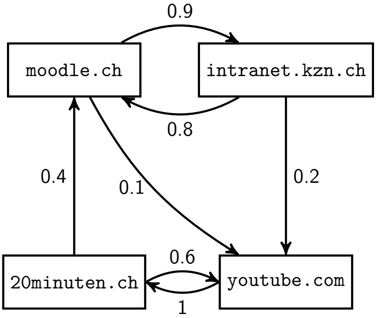
Zustände



Zustand: Beispiele

- Auf welcher Webseite befinde ich mich gerade?
- Andere Beispiele:
  - Wetter (sonnig, regnerisch)
  - Spielfigur auf einem Spielbrett (Feld 1, 2, 3...)
  - Aufenthaltsort eines Schülers (in der Klasse, in der Pause, zu Hause)

Zustände



Zustand: Beispiele

- Auf welcher Webseite befinde ich mich gerade?
- Andere Beispiele:
  - Wetter (sonnig, regnerisch)
  - Spielfigur auf einem Spielbrett (Feld 1, 2, 3...)
  - Aufenthaltsort eines Schülers (in der Klasse, in der Pause, zu Hause)

Definition (Zustand)

Zustand = **eine Situation oder ein Status, in dem sich etwas befindet**

Was sind Markov-Ketten?

Andrej A. Markov

- Die Markov-Kette ist benannt nach dem russischen Mathematiker **Andrej Andrejewitsch Markov** (1856–1922).

Was sind Markov-Ketten?

Andrej A. Markov

- Die Markov-Kette ist benannt nach dem russischen Mathematiker **Andrej Andrejewitsch Markov** (1856–1922).
- Markov entdeckte die Markov-Ketten bei der Analyse von Buchstabenfolgen in literarischen Texten (Textanalyse).

Was sind Markov-Ketten?

Andrej A. Markov

- Die Markov-Kette ist benannt nach dem russischen Mathematiker **Andrej Andrejewitsch Markov** (1856–1922).
- Markov entdeckte die Markov-Ketten bei der Analyse von Buchstabenfolgen in literarischen Texten (Textanalyse).

Definition

- Mathematisches Modell für **Abfolgen von Zuständen**

Was sind Markov-Ketten?

Andrej A. Markov

- Die Markov-Kette ist benannt nach dem russischen Mathematiker **Andrej Andrejewitsch Markov** (1856–1922).
- Markov entdeckte die Markov-Ketten bei der Analyse von Buchstabenfolgen in literarischen Texten (Textanalyse).

Definition

- Mathematisches Modell für **Abfolgen von Zuständen**
- **Markov-Eigenschaft**: Der nächste Zustand hängt **nur vom vorherigen Zustand** ab

Markov-Eigenschaft

Aufgabe 1.1 Markov-Eigenschaft erfüllt?

1. Das Wetter morgen kann gut vorhergesagt werden basierend auf dem heutigen Wetter.
2. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler heute seine Hausaufgaben macht, hängt davon ab, ob er sie gestern und vorgestern gemacht hat.
3. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Programm abstürzt, hängt davon ab, wie viele andere Programme bereits abgestürzt sind.
4. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person Kleider einer bestimmten Marke kauft, hängt nur davon ab, ob das zuletzt gekaufte Kleidungsstück von dieser Marke war.

Beispiel: Wettervorhersage

- Zwei mögliche Zustände: ☀️ (sonnig) oder ☂️ (regnerisch)

Beispiel: Wettervorhersage

- Zwei mögliche Zustände: ☀️ (sonnig) oder ☂️ (regnerisch)
- Übergangswahrscheinlichkeiten:

Beispiel: Wettervorhersage

- Zwei mögliche Zustände: ☀️ (sonnig) oder ☂️ (regnerisch)
- Übergangswahrscheinlichkeiten:
  - Wenn heute ☀️: Morgen zu 80% ☀️, zu 20% ☂️

Beispiel: Wettervorhersage

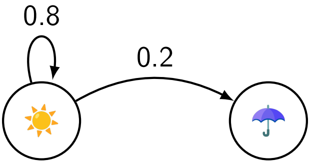
- Zwei mögliche Zustände: ☀️ (sonnig) oder ☂️ (regnerisch)
- Übergangswahrscheinlichkeiten:
  - Wenn heute ☀️: Morgen zu 80% ☀️, zu 20% ☂️
  - Wenn heute ☂️: Morgen zu 40% ☀️, zu 60% ☂️

Beispiel: Wettervorhersage

- Zwei mögliche Zustände: ☀️ (sonnig) oder ☂️ (regnerisch)
- Übergangswahrscheinlichkeiten:
  - Wenn heute ☀️: Morgen zu 80% ☀️, zu 20% ☂️
  - Wenn heute ☂️: Morgen zu 40% ☀️, zu 60% ☂️
- Wie könnte man das darstellen?

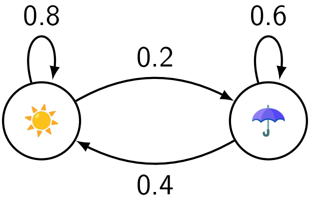
Beispiel: Wettervorhersage

- Zwei mögliche Zustände: ☀️ (sonnig) oder ☂️ (regnerisch)
- Übergangswahrscheinlichkeiten:
  - Wenn heute ☀️: Morgen zu 80% ☀️, zu 20% ☂️
  - Wenn heute ☂️: Morgen zu 40% ☀️, zu 60% ☂️
- Wie könnte man das darstellen?



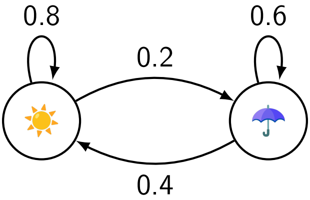
Beispiel: Wettervorhersage

- Zwei mögliche Zustände: ☀️ (sonnig) oder ☂️ (regnerisch)
- Übergangswahrscheinlichkeiten:
  - Wenn heute ☀️: Morgen zu 80% ☀️, zu 20% ☂️
  - Wenn heute ☂️: Morgen zu 40% ☀️, zu 60% ☂️
- Wie könnte man das darstellen?



Beispiel: Wettervorhersage

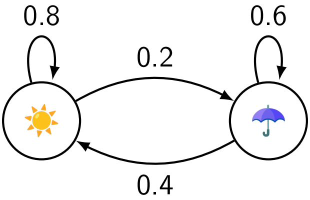
- Zwei mögliche Zustände: ☀️ (sonnig) oder ☂️ (regnerisch)
- Übergangswahrscheinlichkeiten:
  - Wenn heute ☀️: Morgen zu 80% ☀️, zu 20% ☂️
  - Wenn heute ☂️: Morgen zu 40% ☀️, zu 60% ☂️
- Wie könnte man das darstellen?



Gerichteter Graph

Beispiel: Wettervorhersage

- Zwei mögliche Zustände: ☀️ (sonnig) oder ☂️ (regnerisch)
- Übergangswahrscheinlichkeiten:
  - Wenn heute ☀️: Morgen zu 80% ☀️, zu 20% ☂️
  - Wenn heute ☂️: Morgen zu 40% ☀️, zu 60% ☂️
- Wie könnte man das darstellen?

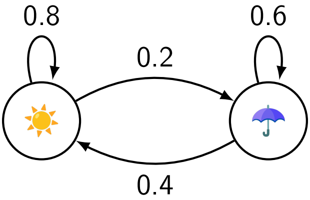


Gerichteter Graph

○ **Knoten** = Zustände

Beispiel: Wettervorhersage

- Zwei mögliche Zustände: ☀️ (sonnig) oder ☂️ (regnerisch)
- Übergangswahrscheinlichkeiten:
  - Wenn heute ☀️: Morgen zu 80% ☀️, zu 20% ☂️
  - Wenn heute ☂️: Morgen zu 40% ☀️, zu 60% ☂️
- Wie könnte man das darstellen?



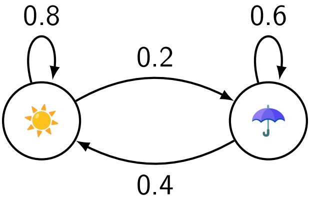
Gerichteter Graph

○ **Knoten** = Zustände

→ **Kanten** = Übergänge mit Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Wettervorhersage

- Zwei mögliche Zustände: ☀️ (sonnig) oder ☂️ (regnerisch)
- Übergangswahrscheinlichkeiten:
  - Wenn heute ☀️: Morgen zu 80% ☀️, zu 20% ☂️
  - Wenn heute ☂️: Morgen zu 40% ☀️, zu 60% ☂️
- Wie könnte man das darstellen?



Gerichteter Graph

○ **Knoten** = Zustände

→ **Kanten** = Übergänge mit Wahrscheinlichkeiten

Summe der ausgehenden Kanten = 1

Übung: Thailändischer Tourist

Aufgabe 1.2

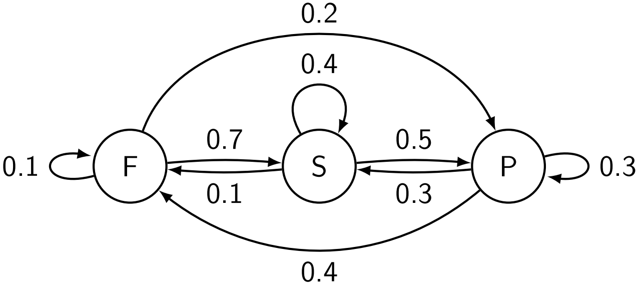
Ein Tourist kommt in Thailand an und möchte die Sonne und Strände auf zwei beliebten Inseln im Süden (Samui und Phangan) geniessen, sowie das Festland besichtigen.
Laut einer Umfrage gilt:

- Ist der Tourist auf dem Festland (**F**), so fährt er am nächsten Tag mit Wahrscheinlichkeit 70% nach Samui (**S**), mit 20% nach Phangan (**P**) und bleibt mit 10% auf dem Festland.
- Ist er auf Samui, bleibt er mit 40% dort, fährt mit 50% nach Phangan und kehrt mit 10% aufs Festland zurück.
- Ist er auf Phangan, bleibt er mit 30% dort, fährt mit 30% nach Samui und kehrt mit 40% aufs Festland zurück.

Erstellen Sie den gerichteten Graphen für die Zustände **F**, **S** und **P**.

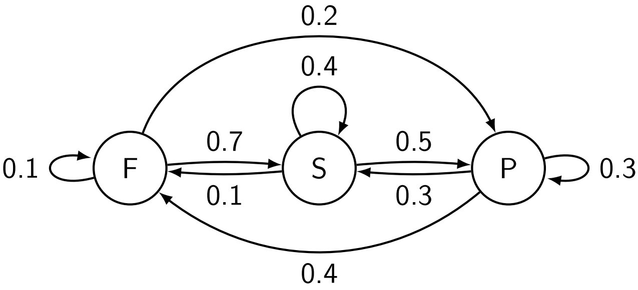
Gerichtete Graphen

Übung: Thailändischer Tourist



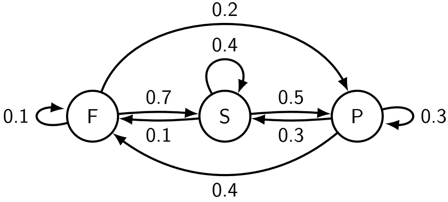
Gerichtete Graphen

Übung: Thailändischer Tourist



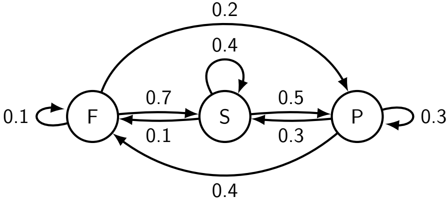
$\Rightarrow$ Übersichtlichere Lösung? Besser für Computer?

Die Übergangsmatrix: Thailand-Beispiel



Gerichteter Graph

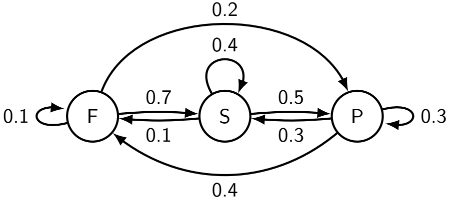
Die Übergangsmatrix: Thailand-Beispiel



Gerichteter Graph

$\Rightarrow$

Die Übergangsmatrix: Thailand-Beispiel



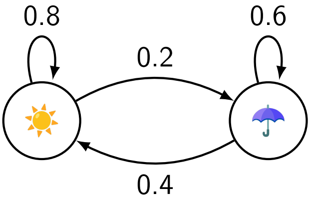
Gerichteter Graph

$\Rightarrow$

		Nach		
		F	**S**	**P**
Von	**F**	0.1	0.7	0.2
	S	0.1	0.4	0.5
	P	0.4	0.3	0.3

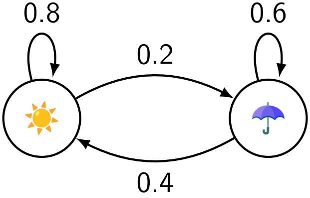
Übergangstabelle

Die Übergangsmatrix



Gerichteter Graph

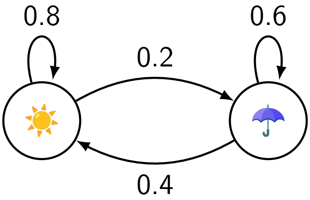
Die Übergangsmatrix



Gerichteter Graph

$\Rightarrow$

Die Übergangsmatrix



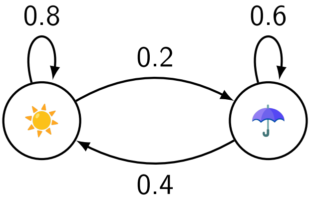
Gerichteter Graph

$\Rightarrow$

		Nach	
		☀️	☂️
Von	☀️	0.8	0.2
	☂️	0.4	0.6

Übergangstabelle

Die Übergangsmatrix



Gerichteter Graph

$\Rightarrow$

		Nach	
		☀️	☂️
Von	☀️	0.8	0.2
	☂️	0.4	0.6

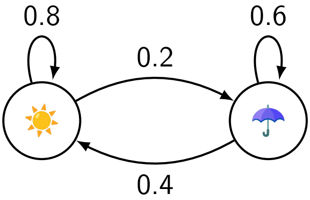
Übergangstabelle

$\Downarrow$

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Übergangsmatrix

Die Übergangsmatrix



Gerichteter Graph

$\Rightarrow$

		Nach	
		☀️	☂️
Von	☀️	0.8	0.2
	☂️	0.4	0.6

Übergangstabelle

$\Downarrow$

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Übergangsmatrix

Matrix: Von lat. *mater* = Mutter, „strukturierende“ Umgebung

Aufgabe 1.3

Ein Tourist kommt in Thailand an und möchte die Sonne und Strände auf zwei beliebten Inseln im Süden (Samui und Phangan) geniessen, sowie das Festland besichtigen. Laut einer Umfrage gilt:

- Ist der Tourist auf dem (**F**), so fährt er am nächsten Tag mit Wahrscheinlichkeit 70% nach Samui (**S**), mit 20% nach Phangan (**P**) und bleibt mit 10% auf dem Festland.
- Ist er auf Samui, bleibt er mit 40% dort, fährt mit 50% nach Phangan und kehrt mit 10% aufs Festland zurück.
- Ist er auf Phangan, bleibt er mit 30% dort, fährt mit 30% nach Samui und kehrt mit 40% aufs Festland zurück.

Erstellen Sie die **Übergangstabelle**:

		Nach		
		F	**S**	**P**
Von	**F**			
	S			
	P			

Lösung: Übergangstabelle für den thailändischen Tourist

		Nach		
		F	**S**	**P**
Von	**F**	0.1	0.7	0.2
	S	0.1	0.4	0.5
	P	0.4	0.3	0.3

Übergangstabelle

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Übergangsmatrix

Startvektor und Vorhersage zukünftiger Zustände

- Startvektor π_0 gibt den Anfangszustand (=Wahrscheinlichkeit, in einem Zustand zu sein) an

Startvektor und Vorhersage zukünftiger Zustände

- Startvektor π_0 gibt den Anfangszustand (=Wahrscheinlichkeit, in einem Zustand zu sein) an
- Beispiel: Heute ist es regnerisch

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \Uparrow & \Uparrow \end{matrix}$$

☀️ ☂️

Startvektor und Vorhersage zukünftiger Zustände

- Startvektor π_0 gibt den Anfangszustand (=Wahrscheinlichkeit, in einem Zustand zu sein) an
- Beispiel: Heute ist es regnerisch

$$\begin{array}{cc} \pi_0 = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} \Uparrow & \Uparrow \\ ☀️ & ☂️ \end{array} \end{array}$$

Gleiche Reihenfolge wie in der Übergangsmatrix:

		Nach	
		☀️	☂️
Von	☀️	0.8	0.2
	☂️	0.4	0.6

Startvektor und Vorhersage zukünftiger Zustände

- Startvektor π_0 gibt den Anfangszustand (=Wahrscheinlichkeit, in einem Zustand zu sein) an
- Beispiel: Heute ist es regnerisch

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Uparrow \quad \Uparrow$

☀️ ☂️

Gleiche Reihenfolge wie in der Übergangsmatrix:

		Nach	
		☀️	☂️
Von	☀️	0.8	0.2
	☂️	0.4	0.6

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen ☀️ wird?

Startvektor und Vorhersage zukünftiger Zustände

- Startvektor π_0 gibt den Anfangszustand (=Wahrscheinlichkeit, in einem Zustand zu sein) an
- Beispiel: Heute ist es regnerisch

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} \Uparrow & \Uparrow \\ \text{☀️} & \text{☂️} \end{array}$$

Gleiche Reihenfolge wie in der Übergangsmatrix:

		Nach	
		☀️	☂️
Von	☀️	0.8	0.2
	☂️	0.4	0.6

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen ☀️ wird?

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot P$$

Startvektor und Vorhersage zukünftiger Zustände

- Startvektor π_0 gibt den Anfangszustand (=Wahrscheinlichkeit, in einem Zustand zu sein) an
- Beispiel: Heute ist es regnerisch

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \Uparrow & \Uparrow \end{matrix}$$

☀️ ☂️

Gleiche Reihenfolge wie in der Übergangsmatrix:

		Nach ☀️	☂️
Von	☀️	0.8	0.2
	☂️	0.4	0.6

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen ☀️ wird?

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_0 \cdot P \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Startvektor und Vorhersage zukünftiger Zustände

- Startvektor π_0 gibt den Anfangszustand (=Wahrscheinlichkeit, in einem Zustand zu sein) an
- Beispiel: Heute ist es regnerisch

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Uparrow$ $\Uparrow$

☀️ ☂️

Gleiche Reihenfolge wie in der Übergangsmatrix:

		Nach	
		☀️	☂️
Von	☀️	0.8	0.2
	☂️	0.4	0.6

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen ☀️ wird?

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_0 \cdot P \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Startvektor und Vorhersage zukünftiger Zustände

- Startvektor π_0 gibt den Anfangszustand (=Wahrscheinlichkeit, in einem Zustand zu sein) an
- Beispiel: Heute ist es regnerisch

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \Uparrow & \Uparrow \\ ☀️ & ☔ \end{array}$$

Gleiche Reihenfolge wie in der Übergangsmatrix:

		Nach	
		☀️	☔
Von	☀️	0.8	0.2
	☔	0.4	0.6

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen ☀️ wird?

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_0 \cdot P \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underline{\underline{0.4}} & 0.6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrixmultiplikation

- Um die Entwicklung einer Markov-Kette zu berechnen, multiplizieren wir einen Zeilenvektor mit einer Matrix.

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

- Um die Entwicklung einer Markov-Kette zu berechnen, multiplizieren wir einen Zeilenvektor mit einer Matrix.

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

- Um die Entwicklung einer Markov-Kette zu berechnen, multiplizieren wir einen Zeilenvektor mit einer Matrix.

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4 Matrix-Multiplikation

Multiplizieren Sie $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$.

Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.5 Matrix-Multiplikation

Multiplizieren Sie $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.5

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.4 & 0.4 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.32 + 0.24 & 0.08 + 0.36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.44 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wettervorhersage für übermorgen

- Startvektor: $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ (heute regnerisch)

Wettervorhersage für übermorgen

- Startvektor: $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ (heute regnerisch)
- Nach einem Tag:

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Wettervorhersage für übermorgen

- Startvektor: $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ (heute regnerisch)
- Nach einem Tag:

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

- Nach zwei Tagen:

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.44 \end{pmatrix}$$

Wettervorhersage für übermorgen

- Startvektor: $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ (heute regnerisch)
- Nach einem Tag:

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

- Nach zwei Tagen:

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.44 \end{pmatrix}$$

Wahrscheinlichkeit, dass es in zwei Tagen sonnig ist: **56%**.

Wettervorhersage für übermorgen

- Startvektor: $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ (heute regnerisch)
- Nach einem Tag:

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

- Nach zwei Tagen:

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.44 \end{pmatrix}$$

Wahrscheinlichkeit, dass es in zwei Tagen sonnig ist: **56%**.

Auftrag: Moodle

1. 1 - Lernkontrolle Markov-Ketten
2. Zusatzaufgaben: 2 - Markov-Ketten

Übung: TikTok / Instagram nach 2 Schritten?

- Übergangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

- Startvektor: $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Start bei TikTok)
- Nach einem Schritt:

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

- Nach zwei Schritten:

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.85 \end{pmatrix}$$

- Die Wahrscheinlichkeit, nach zwei Nutzungen bei Instagram zu landen, beträgt **15%**.

Lernziele

- Lektion 1:

Lernziele

- Lektion 1:
  - [x] Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.

Lernziele

- Lektion 1:
  - ☑ Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.

Lernziele

- Lektion 1:
  - ☑ Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine **Übergangsmatrix** erstellen.

Lernziele

- Lektion 1:
  - ☑ Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine **Übergangsmatrix** erstellen.
  - ☑ Ich kann einen Zustand einer Markov-Kette mithilfe einer **Matrixmultiplikation** vorhersagen.

Lernziele

- Lektion 1:
  - ☑ Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine **Übergangsmatrix** erstellen.
  - ☑ Ich kann einen Zustand einer Markov-Kette mithilfe einer **Matrixmultiplikation** vorhersagen.
- Lektion 2:

Lernziele

- Lektion 1:
  - [x] Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
  - [x] Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.
  - [x] Ich kann aus einer realen Problemstellung eine **Übergangsmatrix** erstellen.
  - [x] Ich kann einen Zustand einer Markov-Kette mithilfe einer **Matrixmultiplikation** vorhersagen.
- Lektion 2:
  - [ ] Ich kann Markov-Ketten **in Python** implementieren.

Lernziele

- Lektion 1:
  - ☑ Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine **Übergangsmatrix** erstellen.
  - ☑ Ich kann einen Zustand einer Markov-Kette mithilfe einer **Matrixmultiplikation** vorhersagen.
- Lektion 2:
  - ☐ Ich kann Markov-Ketten **in Python** implementieren.
  - ☐ Ich kann mithilfe einer Simulation berechnen, wie sich eine Markov-Kette **über mehrere Schritte entwickelt**.

Lernziele

- Lektion 1:
  - [x] Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
  - [x] Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.
  - [x] Ich kann aus einer realen Problemstellung eine **Übergangsmatrix** erstellen.
  - [x] Ich kann einen Zustand einer Markov-Kette mithilfe einer **Matrixmultiplikation** vorhersagen.
- Lektion 2:
  - [ ] Ich kann Markov-Ketten **in Python** implementieren.
  - [ ] Ich kann mithilfe einer Simulation berechnen, wie sich eine Markov-Kette **über mehrere Schritte entwickelt**.
  - [ ] Ich kann die langfristige Verteilung von Markov-Ketten mit Simulationen **in Python** berechnen.

Auftrag: Jupyter Notebooks

„Link auf Programmierumgebung“ auf Moodle

Auftrag: Jupyter Notebooks

- „Link auf Programmierumgebung“ auf Moodle
- Beispiele immer zuerst lesen

Auftrag: Jupyter Notebooks

- „Link auf Programmierumgebung“ auf Moodle
- Beispiele immer zuerst lesen
- *Jeden* Code-Block ausführen: ⇧ + ↵

Lernziele

- Lektion 1:

Lernziele

- Lektion 1:
  - ☑ Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.

Lernziele

- Lektion 1:
  - ☑ Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.

Lernziele

- Lektion 1:
  - ☑ Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine **Übergangsmatrix** erstellen.

Lernziele

- Lektion 1:
  - ☑ Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine **Übergangsmatrix** erstellen.
  - ☑ Ich kann einen Zustand einer Markov-Kette mithilfe einer **Matrixmultiplikation** vorhersagen.

Lernziele

- Lektion 1:
  - ☑ Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine **Übergangsmatrix** erstellen.
  - ☑ Ich kann einen Zustand einer Markov-Kette mithilfe einer **Matrixmultiplikation** vorhersagen.
- Lektion 2:

Lernziele

- Lektion 1:
  - ☑ Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine **Übergangsmatrix** erstellen.
  - ☑ Ich kann einen Zustand einer Markov-Kette mithilfe einer **Matrixmultiplikation** vorhersagen.
- Lektion 2:
  - ☑ Ich kann Markov-Ketten **in Python** implementieren.

Lernziele

- Lektion 1:
  - ☑ Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine **Übergangsmatrix** erstellen.
  - ☑ Ich kann einen Zustand einer Markov-Kette mithilfe einer **Matrixmultiplikation** vorhersagen.
- Lektion 2:
  - ☑ Ich kann Markov-Ketten **in Python** implementieren.
  - ☑ Ich kann mithilfe einer Simulation berechnen, wie sich eine Markov-Kette **über mehrere Schritte entwickelt**.

Lernziele

- Lektion 1:
  - ☑ Ich kann erklären, was eine **Markov-Kette** ist und wie die **Markov-Eigenschaft** funktioniert.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine Abbildung in Form eines **gerichteten Graphen** erstellen.
  - ☑ Ich kann aus einer realen Problemstellung eine **Übergangsmatrix** erstellen.
  - ☑ Ich kann einen Zustand einer Markov-Kette mithilfe einer **Matrixmultiplikation** vorhersagen.
- Lektion 2:
  - ☑ Ich kann Markov-Ketten **in Python** implementieren.
  - ☑ Ich kann mithilfe einer Simulation berechnen, wie sich eine Markov-Kette **über mehrere Schritte entwickelt**.
  - ☑ Ich kann die langfristige Verteilung von Markov-Ketten mit Simulationen **in Python** berechnen.