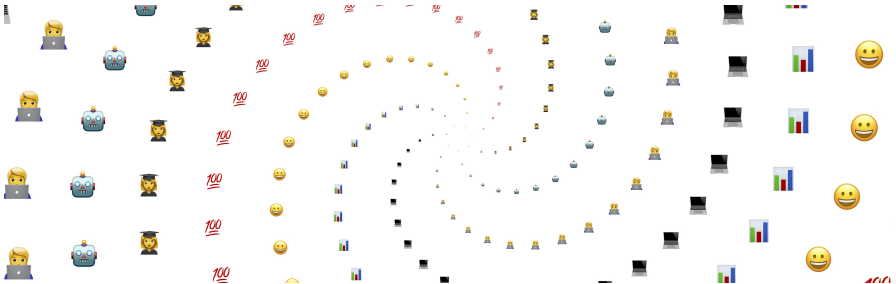
Datenintegrität

Kartentrick-Codierung

Cyril Blum

Fachschaft Informatik
Kantonsschule im Lee



Rückblick 1-fehlerkorrigierende Codierung

- Drei Farben, Codewörter der Länge 5 mit Abstand 3: von Hand lösbar



Rückblick 1-fehlerkorrigierende Codierung

- Drei Farben, Codewörter der Länge 5 mit Abstand 3: von Hand lösbar
- Nachrichten mit 16 Bit $\rightarrow 2^{16} = 65536$ Codewörter



Rückblick 1-fehlerkorrigierende Codierung

- Drei Farben, Codewörter der Länge 5 mit Abstand 3: von Hand lösbar
- Nachrichten mit 16 Bit $\rightarrow 2^{16} = 65536$ Codewörter
- Von Hand suchen ist hoffnungslos

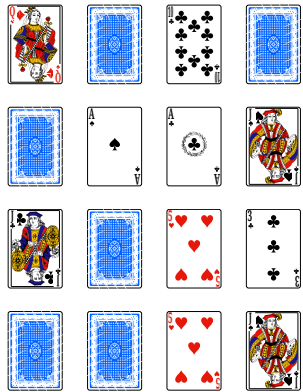


Rückblick 1-fehlerkorrigierende Codierung

- Drei Farben, Codewörter der Länge 5 mit Abstand 3: von Hand lösbar
- Nachrichten mit 16 Bit $\rightarrow 2^{16} = 65536$ Codewörter
- Von Hand suchen ist hoffnungslos
- Gesucht: ein Verfahren, das Codewörter systematisch erzeugt



„Zaubertrick“



Erster Schritt: Auslegen der ursprünglichen Karten ($n = m = 4$)

„Zaubertrick“



Zweiter Schritt: Hinzufügen einer Reihe und einer Spalte (Hilfszauberer)

„Zaubertrick“



Dritter Schritt: Karten, nachdem jemand eine Karte umgedreht hat

„Zaubertrick“ (binär als Matrix)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Erster Schritt: Ursprüngliche Bitmatrix ($n = m = 4$)



„Zaubertrick“ (binär als Matrix)

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \underline{0} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \underline{1} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \underline{0} \end{pmatrix}$$

Zweiter Schritt: Hinzufügen einer Reihe und einer Spalte (Kontrollbits)



„Zaubertrick“ (binär als Matrix)

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \underline{0} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \underline{1} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \underline{0} \end{pmatrix}$$

Dritter Schritt: Eine Bitkarte wurde umgedreht (Fehlerfall)



Die Kartentrickmethode

Für die folgende 6-stellige Bitfolge soll eine 1-fehlerkorrigierende Codierung gefunden werden: 010101

0	1	0
1	0	1

Ursprüngliche Nachricht

Die Kartentrickmethode

Für die folgende 6-stellige Bitfolge soll eine 1-fehlerkorrigierende Codierung gefunden werden: 010101

0	1	0
1	0	1

Ursprüngliche Nachricht

$\rightarrow$

$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
0	1	0	$\underline{1}$
1	0	1	$\underline{0}$

Ursprüngliche Nachricht + $\underline{\text{Kontrollbits}}$

Codewort: Nachricht, erste Zeile und letzte Spalte je ohne das Bit oben rechts, zuletzt das Bit oben rechts

0 1 0 1 0 1 $\underline{1\ 1\ 1}$ $\underline{1\ 0}$ $\underline{1}$



Auftrag

Skript „Datenintegrität“

- 1.17, 1.18
- Challenge: 1.16



Optimalität: so wenig Kontrollbits wie möglich

Mehrere Möglichkeiten für Nachrichten der Länge 16

- $16 = 4 \cdot 4 \rightarrow$ Kontrollbits: $4 + 4 + 1 = 9$



Optimalität: so wenig Kontrollbits wie möglich

Mehrere Möglichkeiten für Nachrichten der Länge 16

- $16 = 4 \cdot 4 \rightarrow$ Kontrollbits: $4 + 4 + 1 = 9$
- $16 = 2 \cdot 8 \rightarrow$ Kontrollbits: $2 + 8 + 1 = 11$



Optimalität: so wenig Kontrollbits wie möglich

Mehrere Möglichkeiten für Nachrichten der Länge 16

- $16 = 4 \cdot 4 \rightarrow$ Kontrollbits: $4 + 4 + 1 = 9$
- $16 = 2 \cdot 8 \rightarrow$ Kontrollbits: $2 + 8 + 1 = 11$
- $16 = 1 \cdot 16 \rightarrow$ Kontrollbits: $1 + 16 + 1 = 18$



Optimalität: so wenig Kontrollbits wie möglich

Mehrere Möglichkeiten für Nachrichten der Länge 16

- $16 = 4 \cdot 4 \rightarrow$ Kontrollbits: $4 + 4 + 1 = 9$
- $16 = 2 \cdot 8 \rightarrow$ Kontrollbits: $2 + 8 + 1 = 11$
- $16 = 1 \cdot 16 \rightarrow$ Kontrollbits: $1 + 16 + 1 = 18$
- Die beiden Seiten des Rechtecks sollten möglichst gleich gross sein



FreeFlower

Optimalität: so wenig Kontrollbits wie möglich

Mehrere Möglichkeiten für Nachrichten der Länge 16

- $16 = 4 \cdot 4 \rightarrow$ Kontrollbits: $4 + 4 + 1 = 9$
- $16 = 2 \cdot 8 \rightarrow$ Kontrollbits: $2 + 8 + 1 = 11$
- $16 = 1 \cdot 16 \rightarrow$ Kontrollbits: $1 + 16 + 1 = 18$
- Die beiden Seiten des Rechtecks sollten möglichst gleich gross sein
- Bei Nachrichten der Länge $48 \rightarrow 6 \cdot 8$ ist optimal!

