Lektion 1

Kantonsschule Im Lee

Modellierung und Abstraktion durch Graphen

Thema und Lernziele

- Thema: Grundlagen der Abstraktion und Modellierung mit Graphen

Thema und Lernziele

- Thema: Grundlagen der Abstraktion und Modellierung mit Graphen
- Lernziele:

Thema und Lernziele

- Thema: Grundlagen der Abstraktion und Modellierung mit Graphen
- Lernziele:
  - Sie beschreiben Zugverbindungen und Computernetzwerke in der abstrakten Sprache der Informatik.

Thema und Lernziele

- Thema: Grundlagen der Abstraktion und Modellierung mit Graphen
- Lernziele:
  - Sie beschreiben Zugverbindungen und Computernetzwerke in der abstrakten Sprache der Informatik.
  - Sie beschreiben drei Situationen aus Ihrem Alltag, die sich mathematisch elegant modellieren lassen.

Thema und Lernziele

- Thema: Grundlagen der Abstraktion und Modellierung mit Graphen
- Lernziele:
  - Sie beschreiben Zugverbindungen und Computernetzwerke in der abstrakten Sprache der Informatik.
  - Sie beschreiben drei Situationen aus Ihrem Alltag, die sich mathematisch elegant modellieren lassen.
  - Sie erklären einer Kollegin (ohne Unterlagen) das historische Brückenproblem von Königsberg unter Verwendung der korrekten Begriffe.

Ablauf der Lektion

- zuerst: Einstieg von mir (Beamer)

Ablauf der Lektion

- zuerst: Einstieg von mir (Beamer)
- danach: Aufgabenblöcke (Sie sind gefragt!) unterbrochen durch kurze Besprechungen (gemeinsam)

Bemerkungen zu dem Thema

- Für dieses Thema werden kaum Vorkenntnisse benötigt!

Bemerkungen zu dem Thema

- Für dieses Thema werden kaum Vorkenntnisse benötigt!
- Ich mag dieses Thema sehr, da es mir eine völlig neue Sichtweise auf diverse Alltagssituationen erlaubt.

Bemerkungen zu dem Thema

- Für dieses Thema werden kaum Vorkenntnisse benötigt!
- Ich mag dieses Thema sehr, da es mir eine völlig neue Sichtweise auf diverse Alltagssituationen erlaubt.
- Ich bin überzeugt, dass die neuen Inhalte und Begriffe auch Ihre Denkweise prägen werden!

Eulers Besuch in Königsberg

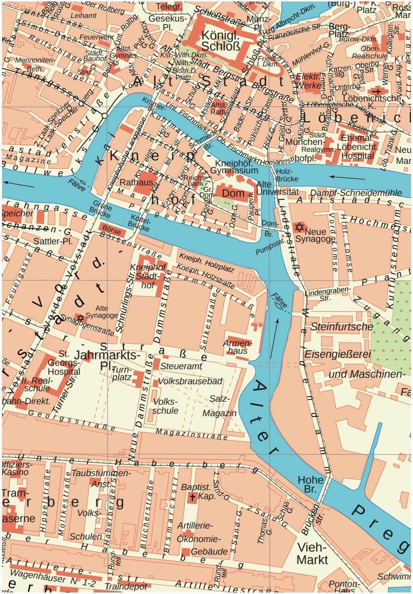
- Der berühmte Schweizer Mathematiker Leonhard Euler soll im Jahre 1736 die Stadt Königsberg besucht haben.

Eulers Besuch in Königsberg

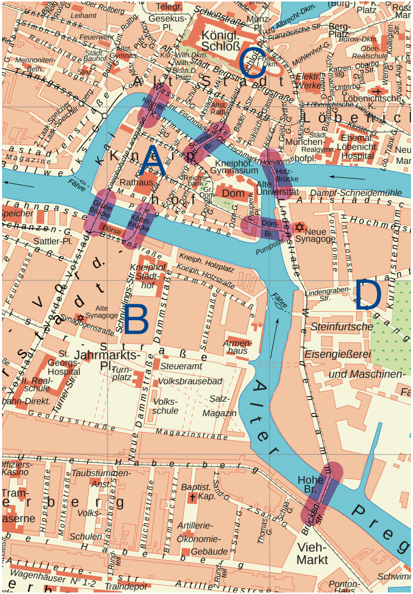
- Der berühmte Schweizer Mathematiker Leonhard Euler soll im Jahre 1736 die Stadt Königsberg besucht haben.
- Königsberg war damals die Hauptstadt der deutschen Provinz Ostpreussen.

Eulers Besuch in Königsberg

- Der berühmte Schweizer Mathematiker Leonhard Euler soll im Jahre 1736 die Stadt Königsberg besucht haben.
- Königsberg war damals die Hauptstadt der deutschen Provinz Ostpreussen.
- Seit dem Jahre 1946 gehört die Stadt zu Russland und wurde in *Kaliningrad* unbenannt.



Telegr.
Gesekus-Pl.
Schloßstraße
Königl. Schloß
Münz-Pl.
Hzg. Albrecht-Dkm.
Französische Str.
Berg-Platz
Bürow-Dkm.
Ober-Realschule
Mühlenhof-G.
Leihamt
Ober Roßberg
Untere Laak
Simon-Dach-Str.
Feuerwehr
Reifschläger
Städt. Bauhof
Altst. Gymnas.
Wilh.Dkm.
Bism.D.
Mennoniten-Beth.
Tränkgasse
Vogel-G.
Staz.
Alt-Stadt
Städt. Bergstraße
Bergstraße
Elektr. Werke
Katzen-Stg.
Oberbg.-Str.
Unterbg.
Löbenichtsche
Löbenichtsche Langgasse
Löbenicht
Altst. Rath.
Kloster-G.
Städt. Realgymn.
München-hofpl.
Ehemal. Löbenicht. Hospital
Krämer-Br.
Kohlmarkt
Fleischbänken
Schmiede-Br.
Ob. Fischmarkt
Homannstr.
Kneiphöf. Gymnasium
Holz-Brücke
Alte Universität
Dampf-Schneidemühle
Rathaus
Reichs-bank
Dom
Kneiphof
Magisterstraße
Fähre
Grüne Brücke
Köttel-Brücke
Börse
Börsenstraße
Dom-Br.
Pumpstat.
Neue Synagoge
Lindenstraße
Vorder Lomse
Hinter Lomse
Hochmeister
Kurfürstendamm
Altstädts
Magazine
Bollwerk
Schanzen-G.
Sattler-Pl.
Feuergasse
Kneipholsche Langgasse
Kneiph. Holzplatz
Kneiph. Holzstraße
Kneiphof Stadt-hof
Schnürlings-Str.
Dammstraße
Tamnaustraße
Selkestraße
Lindengraben-Str.
Zugang
Steinfurtsche
Eisengießerei
und Maschinen-
Vorstadt
Alte Synagoge
Synagogenstraße
Armen-haus
Jahrmarkts-Pl.
St. Georgs-Hospital
II. Real-schule
Turner-Str.
Turn-platz
Steueramt
Volksbrausebad
Volks-schule
Salz-Magazin
Georgsstraße
Neue Dammstraße
Magazinstraße
Alter Pregel
Weidendamm
Unter Haberberg
Offiziers-Kasino
Taubstummen-Anst.
Hippelstraße
Moltkestraße
Volks-Schulen
Haberberger
Blücherstraße
Bismarckstr.
Baptist. Kap.
1. Sand-G.
2. Sand-G.
3. Sand-G.
Thomas-G.
Schaa-G.
Artillerie-Ökonomie-Gebäude
Hohe Br.
Brücken-str.
Vieh-Markt
Pregel
Haberberg
Kaserne
Artillerie
Wagenhäuser N° 1-2
Traindepot
Artilleriestraße
Ponton-Haus
Schwimm


A
B
C
D
Königl. Schloß
Schloßstraße
Telegr.
Gesekus-Pl.
Münz-Pl.
Leihamt
Feuerwehr
Städt. Bauhof
Altst. Gymnas.
Mennoniten-Beth.
Trankgasse
Alt-Stadt
Krämer-Br.
Schmiede-Br.
Holz-Brücke
Grüne Brücke
Köttel-Brücke
Dom-Br.
Hohe Br.
Kneiphof
Rathaus
Dom
Kneiphöf. Gymnasium
Alte Universität
Reichs-bank
Börse
Börsenstraße
Neue Synagoge
Lindenstraße
Pumpstr.
Fähre
Dampf-Schneidemühle
Altstädt. Langgasse
Bergstraße
Mühlenhof-G.
Elektr. Werke
Löbenichtsche Langgasse
Löbenicht
Städt. Realgymn.
München-hofpl.
Ehemal. Löbenicht. Hospital
Ober-Realschule
Bürow-Dkm.
Berg-Platz
Französische Str.
Hzg. Albrecht-Dkm.
Kneiph. Holzplatz
Kneiph. Holzstraße
Tamnaustraße
Kneiphof Städt. hof
Schmiedestr.
Sattler-Pl.
Alte Synagoge
Synagogenstraße
Vorstadt
Jahrmarkts-Pl.
St. Georgs-Hospital
Turnplatz
Steueramt
Volksbrausebad
Volks-schule
Salz-Magazin
Magazinstraße
Georgsstraße
Dammstraße
Neue Dammstraße
Selkestraße
Armen-haus
Steinfurtsche
Eisengießerei
und Maschinen-
Lindengraben-Str.
Kurfürstendamm
Hochmeisterstr.
Alter Pregel
Unter Haberberg
Haberberg
Offiziers-Kasino
Taubstummen-Anst.
Volks-Schulen
Baptist. Kap.
Artillerie-Ökonomie-Gebäude
Artilleriestraße
Brücken-Str.
Vieh-Markt
Ponton-Haus
Traindepot
Wagenhäuser No 1-2
II. Real-schule
Turner-Str.
Moltkestraße
Blücherstraße
Bismarckstr.
Hippelstraße
Pregel

Königsberger Brückenproblem

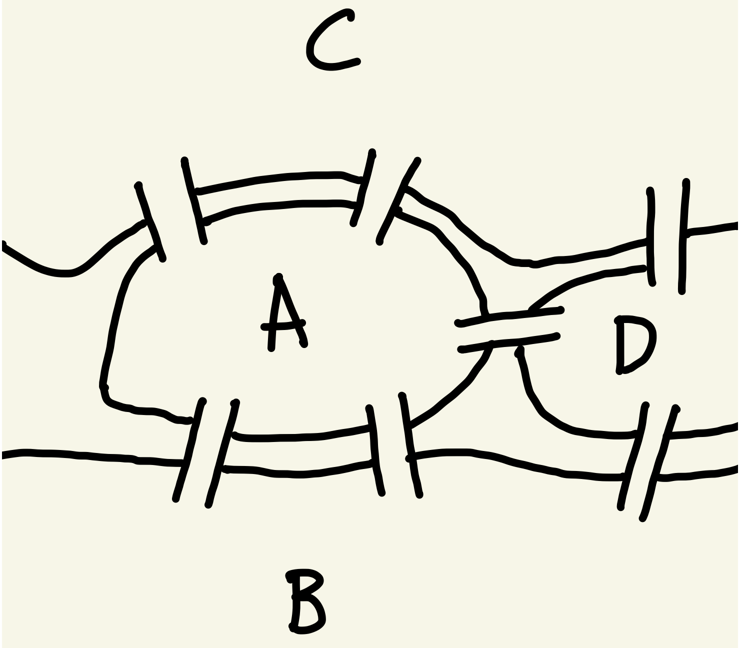
- Die vier verschiedenen Stadtteile Kneiphof (A), Vorstadt (B), Alt-Stadt (C) und Lomse (D) werden von dem Fluss *Pregel* von einander getrennt.

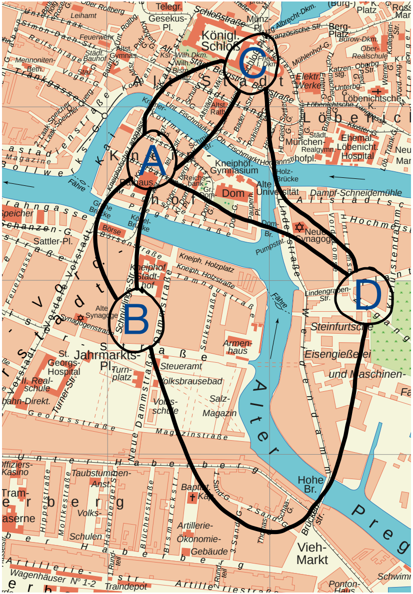
Königsberger Brückenproblem

- Die vier verschiedenen Stadtteile Kneiphof (A), Vorstadt (B), Alt-Stadt (C) und Lomse (D) werden von dem Fluss *Pregel* von einander getrennt.
- Die Stadtteile sind durch sieben Brücken verbunden.

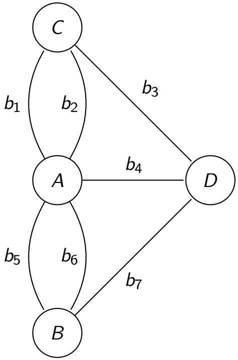
Formulierung des Brückenproblems

Gibt es einen Weg durch Königsberg, bei dem man alle sieben Brücken **genau einmal** überquert, und wenn ja, ist auch ein Rundweg möglich, bei dem man wieder zum Ausgangspunkt gelangt?

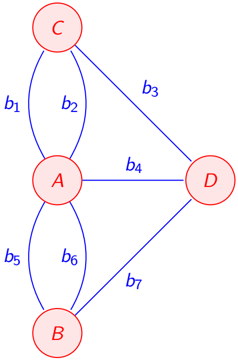

C
A
D
B



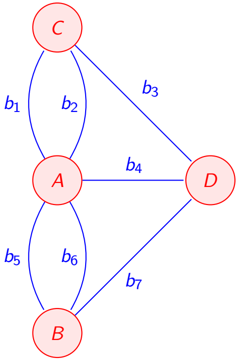
A
B
C
D
Königl. Schloß
Schloßstraße
Telegr.
Gesekus-Pl.
Münz-Pl.
Berg-Platz
Mühlenhof-G.
Elektr. Werke
Löbenichtsche K.
Altst. Rath.
Kneiphöf. Gymnasium
Alte Universität
Dom
Rathaus
Dampf-Schneidemühle
Holz-Brücke
Neue Synagoge
Börse
Kneiphof Stadt-hof
Kneiph. Holzplatz
Kneiph. Holzstraße
Alte Synagoge
Synagogenstraße
Jahrmarkts-Pl.
St. Georgs-Hospital
II. Real-schule
Turnplatz
Steueramt
Volksbrausebad
Volks-schule
Salz-Magazin
Armen-haus
Steinfurtsche
Eisengießerei
und Maschinen-
Lindengraben-Str.
Lindenstraße
Alter Pregel
Hohe Br.
Vieh-Markt
Magazinstraße
Georgsstraße
Neue Dammstraße
Unter Haberberg
Taubstummen-Anst.
Volks-Schulen
Artillerie-Ökonomie-Gebäude
Baptist. Kap.
Wagenhäuser No 1-2
Traindepot
Ponton-Haus
Sattler-Pl.
Mennoniten-Beth.
Trankgasse
Hochmeister
Dampf-Schneidemühle



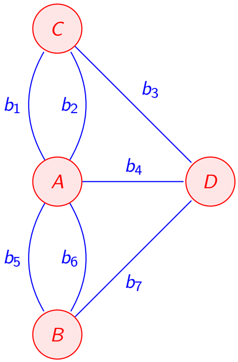
Modellierung des Brückenproblems durch einen Graphen (genauer: Multigraphen)



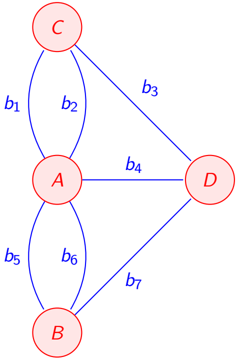
- Die „runden Blasen“ werden ***Knoten*** genannt. Dieser Graph hat die vier Knoten A, B, C und D (Stadtteile).



- Die „runden Blasen" werden ***Knoten*** genannt. Dieser Graph hat die vier Knoten A, B, C und D (Stadtteile).
- Die „Verbindungslinien" werden ***Kanten*** genannt. Dieser Graph hat die sieben Kanten $b_1, b_2, \ldots, b_7$ (Brücken).



- Für einen gegeben Knoten wird die Anzahl der Kanten, welche an diesen Knoten angrenzen, als der ***Grad*** dieses Knoten bezeichnet.



- Für einen gegeben Knoten wird die Anzahl der Kanten, welche an diesen Knoten angrenzen, als der ***Grad*** dieses Knoten bezeichnet.
- Der Grad von A in unserem Beispiel ist 5. Die Grade der Knoten B, C und D sind jeweils 3.

Formulierung des Brückenproblems (in der Sprache von Graphen)

Brückenproblem

Gibt es einen Weg durch Königsberg, bei dem man alle sieben Kanten genau einmal überquert, und wenn ja, ist auch ein Rundweg möglich, bei dem man wieder zum Ausgangspunkt gelangt?

1. Aufgabenblock (5 Minuten, danach kurze Besprechung)

Lösen Sie die beiden Aufgaben 1.1 und 1.2.

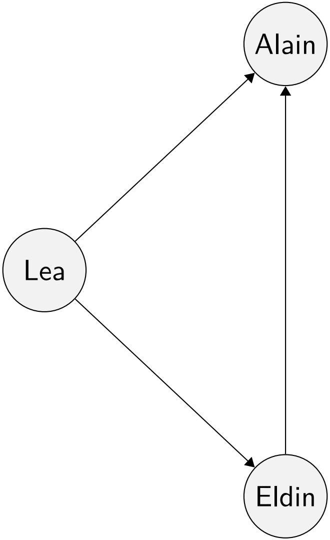
Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.1

- In einem **sozialen Netzwerk** können die User als Knoten angesehen werden. Dabei sind zwei Knoten genau dann miteinander verbunden, wenn die entsprechenden User miteinander befreundet sind.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.1

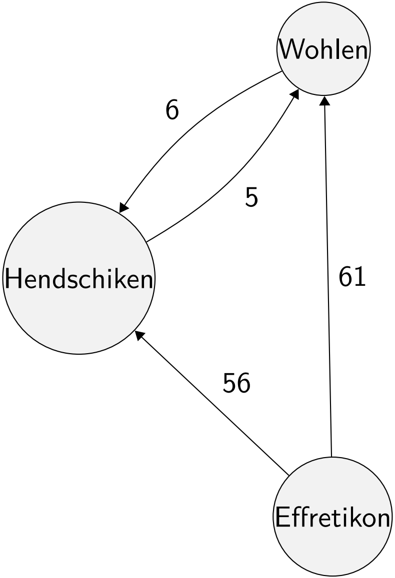
- In einem **sozialen Netzwerk** können die User als Knoten angesehen werden. Dabei sind zwei Knoten genau dann miteinander verbunden, wenn die entsprechenden User miteinander befreundet sind.
- In einem **Modell zur Simulation von Pandemien** können die Menschen als Knoten aufgefasst werden. Dabei sind zwei Knoten genau dann miteinander verbunden, wenn die beiden entsprechenden Menschen in den letzten drei Tagen persönlichen Kontakt zu einander hatten.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.2, Teil (a)



Verlinkung von Webseiten in der Klasse G2B

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.2, Teil (b)

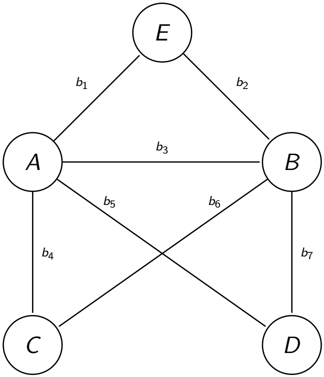


Zugverbindungen

2. Aufgabenblock (10 Minuten, ohne Besprechung)

Lösen Sie die drei Aufgaben 1.3, 1.4 und 1.5. Lesen Sie auch die Definition der Eulerwege und Eulerkreise.

Beobachtungen zu Eulerkreisen



Beispiels eines Eulerkreises in diesem Graphen:

$$A \xrightarrow{b_3} B \xrightarrow{b_2} E \xrightarrow{b_1} A \xrightarrow{b_4} C \xrightarrow{b_6} B \xrightarrow{b_7} D \xrightarrow{b_5} A.$$

Notwendige Bedingung für einen Eulerkreis

(Ein Graph enthält ein Eulerkreis.)

$$\Downarrow$$

(Der Grad jedes Knoten in dem Graphen ist gerade.)

Begründung

$$\color{blue}{s} \xrightarrow{\color{red}{s \text{ raus}}} v_1 \longrightarrow v_2 \xrightarrow{\color{green}{v_3 \text{ rein}}} v_3 \xrightarrow{\color{red}{v_3 \text{ raus}}} v_4 \longrightarrow v_5 \longrightarrow \dots \longrightarrow v_n \xrightarrow{\color{green}{s \text{ rein}}} \color{blue}{s}$$

- Jeder Knoten wird genau so oft besucht (rein) wie verlassen (raus)!

Begründung

$$s \xrightarrow{s \text{ raus}} v_1 \longrightarrow v_2 \xrightarrow{v_3 \text{ rein}} v_3 \xrightarrow{v_3 \text{ raus}} v_4 \longrightarrow v_5 \longrightarrow \dots \longrightarrow v_n \xrightarrow{s \text{ rein}} s$$

- Jeder Knoten wird genau so oft besucht (rein) wie verlassen (raus)!
- Wird ein Knoten also k-mal besucht, so wird er auch k-mal verlassen. $\Rightarrow$ Es grenzen genau $2k$ (gerade Zahl) Kanten an den Knoten an und somit ist sein Grad eine gerade Zahl!

3. Aufgabenblock (Rest der Lektion)

Lösen Sie die beiden Aufgaben 1.6 und 1.7.
Falls Sie schon fertig sind: Wenden Sie sich den Aufgaben 1.8 und 1.9 zu.

Pause

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit und Ihre Aufmerksamkeit!