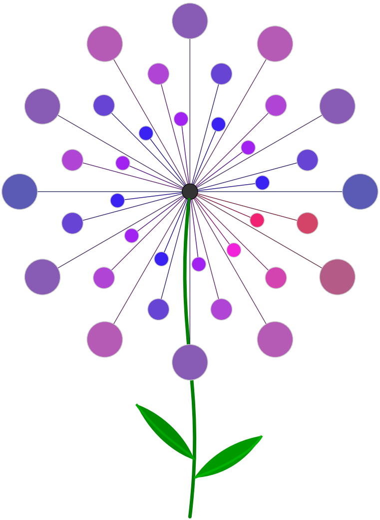
Lektion 1



FreeFlower

Modellierung und Abstraktion durch Graphen

Thema und Lernziele

- Thema: Grundlagen der Abstraktion und Modellierung mit Graphen

Thema und Lernziele

- Thema: Grundlagen der Abstraktion und Modellierung mit Graphen
- Lernziele:

Thema und Lernziele

- Thema: Grundlagen der Abstraktion und Modellierung mit Graphen
- Lernziele:
  - Sie beschreiben Zugverbindungen und Computernetzwerke in der abstrakten Sprache der Informatik.

Thema und Lernziele

- Thema: Grundlagen der Abstraktion und Modellierung mit Graphen
- Lernziele:
  - Sie beschreiben Zugverbindungen und Computernetzwerke in der abstrakten Sprache der Informatik.
  - Sie beschreiben drei Situationen aus Ihrem Alltag, die sich mathematisch elegant modellieren lassen.

Thema und Lernziele

- Thema: Grundlagen der Abstraktion und Modellierung mit Graphen
- Lernziele:
  - Sie beschreiben Zugverbindungen und Computernetzwerke in der abstrakten Sprache der Informatik.
  - Sie beschreiben drei Situationen aus Ihrem Alltag, die sich mathematisch elegant modellieren lassen.
  - Sie erklären einer Kollegin (ohne Unterlagen) das historische Brückenproblem von Königsberg unter Verwendung der korrekten Begriffe.

Ablauf der Lektion

- zuerst: Einstieg von mir (Beamer)

Ablauf der Lektion

- zuerst: Einstieg von mir (Beamer)
- danach: Aufgabenblöcke (Sie sind gefragt!) unterbrochen durch kurze Besprechungen (gemeinsam)

Bemerkungen zu dem Thema

- Für dieses Thema werden kaum Vorkenntnisse benötigt!

Bemerkungen zu dem Thema

- Für dieses Thema werden kaum Vorkenntnisse benötigt!
- Ich mag dieses Thema sehr, da es mir eine völlig neue Sichtweise auf diverse Alltagssituationen erlaubt.

Bemerkungen zu dem Thema

- Für dieses Thema werden kaum Vorkenntnisse benötigt!
- Ich mag dieses Thema sehr, da es mir eine völlig neue Sichtweise auf diverse Alltagssituationen erlaubt.
- Ich bin überzeugt, dass die neuen Inhalte und Begriffe auch Ihre Denkweise prägen werden!

Eulers Besuch in Königsberg

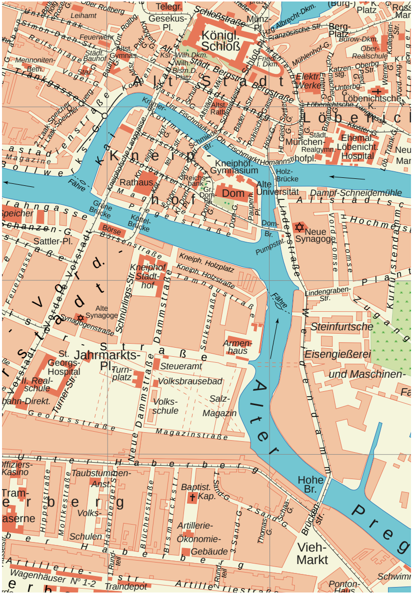
- Der berühmte Schweizer Mathematiker Leonhard Euler soll im Jahre 1736 die Stadt Königsberg besucht haben.

Eulers Besuch in Königsberg

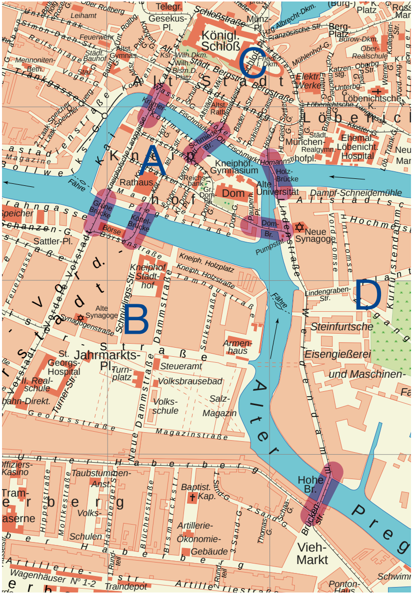
- Der berühmte Schweizer Mathematiker Leonhard Euler soll im Jahre 1736 die Stadt Königsberg besucht haben.
- Königsberg war damals die Hauptstadt der deutschen Provinz Ostpreussen.

Eulers Besuch in Königsberg

- Der berühmte Schweizer Mathematiker Leonhard Euler soll im Jahre 1736 die Stadt Königsberg besucht haben.
- Königsberg war damals die Hauptstadt der deutschen Provinz Ostpreussen.
- Seit dem Jahre 1946 gehört die Stadt zu Russland und wurde in *Kaliningrad* umbenannt.



Königl. Schloß
Schloßstraße
Telegr.
Gesekus-Pl.
Münz-Pl.
Berg-Platz
Altstadt
Löbenicht
Kneiphof
Löbenichtsche
Elektr. Werke
Mühlenhof-G.
Leihamt
Feuerwehr
Städt. Bauhof
Altst. Gymnas.
Mennoniten-Beth.
Trankgasse
Magazine
Fähre
Rathaus
Dom
Kneiphöf. Gymnasium
Alte Universität
Holz-Brücke
Dampf-Schneidemühle
Grüne Brücke
Köttel-Brücke
Börse
Börsenstraße
Neue Synagoge
Lindenstraße
Pumpstr.
Hochmeisterstr.
Kneiph. Holzplatz
Kneiph. Holzstraße
Kneiphof Stadt-hof
Schnürlings-Str.
Dammstraße
Sattler-Pl.
Alte Synagoge
Synagogenstraße
Lindengraben-Str.
Steinfurtsche
Eisengießerei
und Maschinen-
Armen-haus
Jahrmarkts-Pl.
St. Georgs-Hospital
Turn-platz
Steueramt
Volksbrausebad
Salz-Magazin
Volks-schule
II. Real-schule
Turner-Str.
Georgsstraße
Magazinstraße
Neue Dammstraße
Alter Pregel
Weidendamm
Hohe Br.
Taubstummen-Anst.
Baptist. Kap.
Artillerie-Ökonomie-Gebäude
Volks-Schulen
Offiziers-Kasino
Vieh-Markt
Pregel
Brücken-str.
Wagenhäuser No 1-2
Traindepot
Artilleriestraße
Ponton-Haus
Städt. Realgymn.
Ehemal. Löbenicht. Hospital
München-hofpl.



A
B
C
D
Königl. Schloß
Schloßstraße
Telegr.
Gesekus-Pl.
Münz-Pl.
Hzg.-Albrecht-Dkm.
Französische Str.
Berg-Platz
Bürow-Dkm.
Ober-Realschule
Mühlenhof-G.
Elektr. Werke
Löbenichtsche
Löbenichtsche Langgasse
Ehemal. Löbenicht. Hospital
Städt. Realgymn.
München-hofpl.
Alt-Stadt
Bergstraße
Altst. Rath.
Leiham
Unt. Laak
Simon-Dach-Str.
Feuerwehr
Reifschläger
Städt. Bauhof
Altst. Gymnas.
Mennoniten-Beth.
Staz.
Trankgasse
Vogel-G.
Laak-Speicher
Magazine
Kneiphof
Kneiphöf. Langgasse
Krämer Br.
Schmiede Br.
Kneiphöf. Gymnasium
Rathaus
Reichs-bank
Dom
Alte Universität
Holz-Brücke
Honig Br.
Dampf-Schneidemühle
Altstädt.
Grüne Brücke
Köttel-Brücke
Börse
Börsenstraße
Dom-Br.
Neue Synagoge
Pumpstat.
Lindenstraße
Hochmeisterstr.
Vorstadt
Vorstädt.
Sattler-Pl.
Schanzen-G.
Kneiph. Holzplatz
Kneiph. Holzstraße
Tamnaustraße
Kneiphof Stadt-hof
Schnürlings-Str.
Dammstraße
Selkestraße
Alte Synagoge
Synagogenstraße
Armen-haus
Lindengraben-Str.
Kurfürstendamm
Fähre
Steinfurtsche
Eisengießerei
und Maschinen-
Weidendamm
Jahrmarkts-Pl.
St. Georgs-Hospital
Steueramt
Turn-platz
Volksbrausebad
II. Real-schule
Turner-Str.
Volks-schule
Salz-Magazin
Georgsstraße
Magazinstraße
Neue Dammstraße
Alter Pregel
Unter Haberberg
Offiziers-Kasino
Taubstummen-Anst.
Baptist. Kap.
Hohe Br.
Brücken-Str.
Hippelstraße
Moltkestraße
Blücherstraße
Bismarckstr.
Volks-Schulen
Haberberg
Tram-Kaserne
Artillerie-Ökonomie-Gebäude
Vieh-Markt
Pregel
Thomas-G.
Artilleriestraße
Wagenhäuser Nº 1-2
Traindepot
Ponton-Haus

Königsberger Brückenproblem

- Die vier verschiedenen Stadtteile Kneiphof (A), Vorstadt (B), Alt-Stadt (C) und Lomse (D) werden von dem Fluss *Pregel* von einander getrennt.

Königsberger Brückenproblem

- Die vier verschiedenen Stadtteile Kneiphof (A), Vorstadt (B), Alt-Stadt (C) und Lomse (D) werden von dem Fluss *Pregel* von einander getrennt.
- Die Stadtteile sind durch sieben Brücken verbunden.

Formulierung des Brückenproblems

Die zentrale Frage:

Gibt es einen Weg durch Königsberg, bei dem man alle sieben Brücken **genau einmal** überquert?

Formulierung des Brückenproblems

Die zentrale Frage:

Gibt es einen Weg durch Königsberg, bei dem man alle sieben Brücken **genau einmal** überquert?

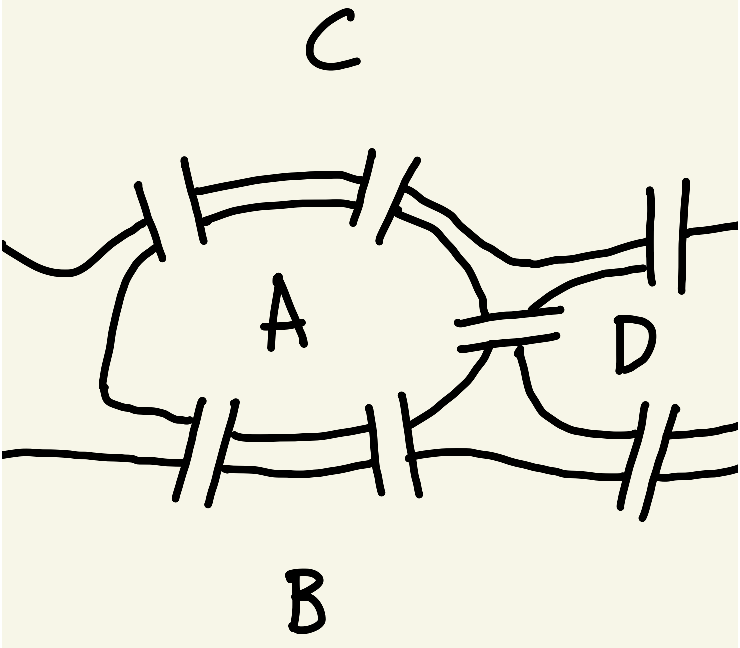
- Falls ja: Ist auch ein **Rundweg** möglich (Startpunkt = Endpunkt)?

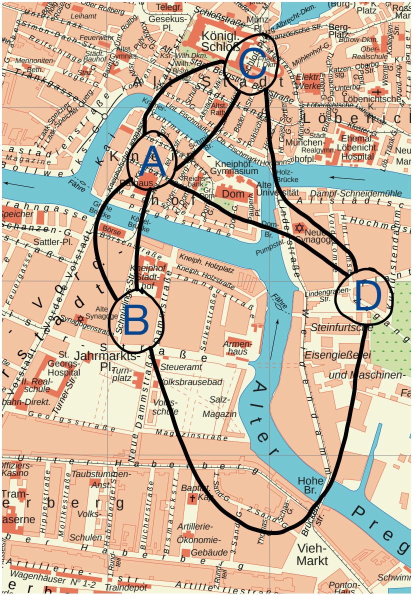
Formulierung des Brückenproblems

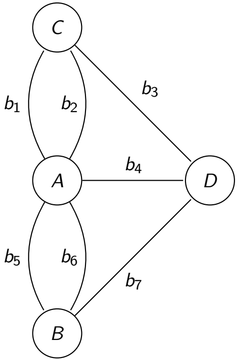
Die zentrale Frage:

Gibt es einen Weg durch Königsberg, bei dem man alle sieben Brücken **genau einmal** überquert?

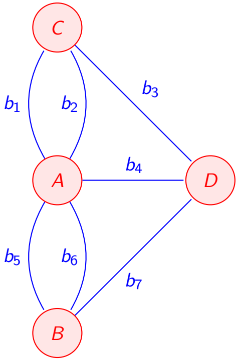
- Falls ja: Ist auch ein **Rundweg** möglich (Startpunkt = Endpunkt)?
- Wichtig: Man darf Stadtteile beliebig oft betreten, aber jede Brücke nur einmal nutzen!


C
A
D
B

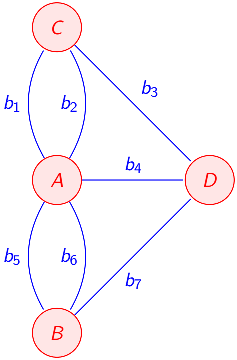

A
B
C
D
Königl. Schloß
Dom
Kneiphöf. Gymnasium
Alte Universität
Dampf-Schneidemühle
Holz-Brücke
Grüne Brücke
Köttel-Brücke
Börse
Kneiphof Stadt-hof
Jahrmarkts-Pl.
Steueramt
Volksbrausebad
Salz-Magazin
Armen-haus
Eisengießerei und Maschinen-
Hohe Br.
Vieh-Markt
Alter Pregel
Löbenichtsche
Neue Synagoge
Alte Synagoge
Lindengraben-Str.
Steinfurtsche



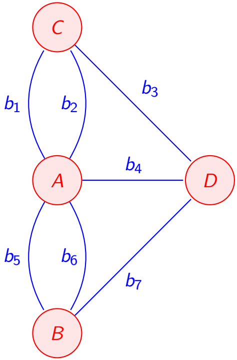
Modellierung des Brückenproblems durch einen Graphen (genauer: Multigraphen)



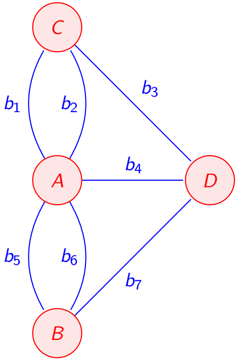
- Die „runden Blasen“ werden ***Knoten*** genannt. Dieser Graph hat die vier Knoten A, B, C und D (Stadtteile).



- Die „runden Blasen“ werden ***Knoten*** genannt. Dieser Graph hat die vier Knoten A, B, C und D (Stadtteile).
- Die „Verbindungslinien“ werden ***Kanten*** genannt. Dieser Graph hat die sieben Kanten $b_1, b_2, \ldots, b_7$ (Brücken).



- Für einen gegeben Knoten wird die Anzahl der Kanten, welche an diesen Knoten angrenzen, als der ***Grad*** dieses Knoten bezeichnet.



- Für einen gegeben Knoten wird die Anzahl der Kanten, welche an diesen Knoten angrenzen, als der ***Grad*** dieses Knoten bezeichnet.
- Der Grad von A in unserem Beispiel ist 5. Die Grade der Knoten B, C und D sind jeweils 3.

Formulierung des Brückenproblem

Definition (Königsberger Brückenproblem, in der Sprache von Graphen)

Gibt es einen Weg durch Königsberg, bei dem man alle sieben Kanten genau einmal überquert, und wenn ja, ist auch ein Rundweg möglich, bei dem man wieder zum Ausgangspunkt gelangt?

1. Aufgabenblock (5 Minuten, danach kurze Besprechung)

Lösen Sie die beiden Aufgaben 1.1 und 1.2 im Skript.

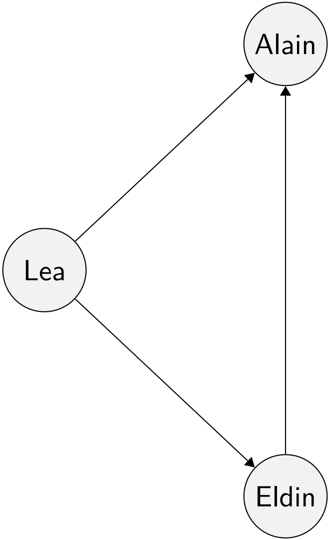
Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.1

- In einem **sozialen Netzwerk** können die User als Knoten angesehen werden. Dabei sind zwei Knoten genau dann miteinander verbunden, wenn die entsprechenden User miteinander befreundet sind.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.1

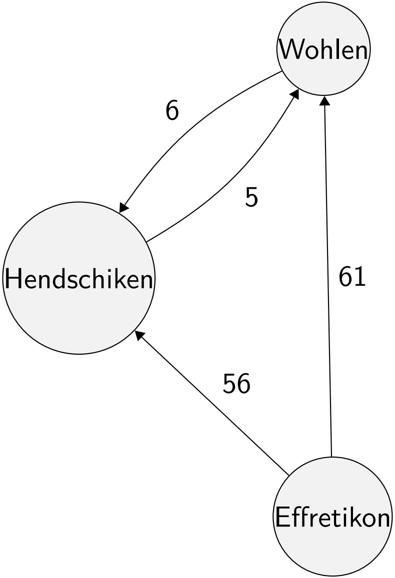
- In einem **sozialen Netzwerk** können die User als Knoten angesehen werden. Dabei sind zwei Knoten genau dann miteinander verbunden, wenn die entsprechenden User miteinander befreundet sind.
- In einem **Modell zur Simulation von Pandemien** können die Menschen als Knoten aufgefasst werden. Dabei sind zwei Knoten genau dann miteinander verbunden, wenn die beiden entsprechenden Menschen in den letzten drei Tagen persönlichen Kontakt zu einander hatten.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.2, Teil (a)



Verlinkung von Webseiten in der Klasse G2B

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.2, Teil (b)



Zugverbindungen

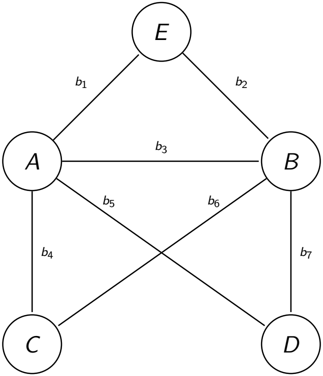
2. Aufgabenblock (10 Minuten, ohne Besprechung)

- Studieren Sie die Definition der Eulerwege und Eulerkreise im Skript.

2. Aufgabenblock (10 Minuten, ohne Besprechung)

- Studieren Sie die Definition der Eulerwege und Eulerkreise im Skript.
- Lösen Sie die drei Aufgaben 1.3, 1.4 und 1.5 im Skript.

Beobachtungen zu Eulerkreisen



Beispiels eines Eulerkreises in diesem Graphen:

$$A \xrightarrow{b_3} B \xrightarrow{b_2} E \xrightarrow{b_1} A \xrightarrow{b_4} C \xrightarrow{b_6} B \xrightarrow{b_7} D \xrightarrow{b_5} A.$$

Notwendige Bedingung für einen Eulerkreis

(Ein Graph enthält ein Eulerkreis.)

$$\Downarrow$$

(Der Grad jedes Knoten in dem Graphen ist gerade.)

Begründung

$$s \xrightarrow{s\text{ raus}} v_1 \longrightarrow v_2 \xrightarrow{v_3\text{ rein}} v_3 \xrightarrow{v_3\text{ raus}} v_4 \longrightarrow v_5 \longrightarrow \ldots \longrightarrow v_n \xrightarrow{s\text{ rein}} s$$

- Jeder Knoten wird genau so oft besucht (rein) wie verlassen (raus)!

Begründung

$$s \xrightarrow{s \text{ raus}} v_1 \longrightarrow v_2 \xrightarrow{v_3 \text{ rein}} v_3 \xrightarrow{v_3 \text{ raus}} v_4 \longrightarrow v_5 \longrightarrow \dots \longrightarrow v_n \xrightarrow{s \text{ rein}} s$$

- Jeder Knoten wird genau so oft besucht (rein) wie verlassen (raus)!
- Wird ein Knoten also k-mal besucht, so wird er auch k-mal verlassen. $\Rightarrow$ Es grenzen genau $2k$ (gerade Zahl) Kanten an den Knoten an und somit ist sein Grad eine gerade Zahl!

3. Aufgabenblock

- ✎ Lösen Sie die beiden Aufgaben 1.6 und 1.7 im Skript.

3. Aufgabenblock

- Lösen Sie die beiden Aufgaben 1.6 und 1.7 im Skript.
- Falls Sie schon fertig sind: Wenden Sie sich den Aufgaben 1.8 und 1.9 zu.

Pause

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit und Ihre Aufmerksamkeit!