

Anhang

Eigenschaften von Markov-Ketten

- ▶ **Irreduzibilität:** Von jedem Zustand kann man jeden anderen erreichen

Eigenschaften von Markov-Ketten

- ▶ **Irreduzibilität:** Von jedem Zustand kann man jeden anderen erreichen
- ▶ **Aperiodizität:** Rückkehr zu einem Zustand nicht nur in festen Zeitabständen

Eigenschaften von Markov-Ketten

- ▶ **Irreduzibilität:** Von jedem Zustand kann man jeden anderen erreichen
- ▶ **Aperiodizität:** Rückkehr zu einem Zustand nicht nur in festen Zeitabständen
- ▶ **Absorbierende Zustände:** Zustände, die nicht mehr verlassen werden

Eigenschaften von Markov-Ketten

- ▶ **Irreduzibilität:** Von jedem Zustand kann man jeden anderen erreichen
- ▶ **Aperiodizität:** Rückkehr zu einem Zustand nicht nur in festen Zeitabständen
- ▶ **Absorbierende Zustände:** Zustände, die nicht mehr verlassen werden
- ▶ **Rekurrenz:** Wahrscheinlichkeit, wieder in einen Zustand zurückzukehren

Eigenschaften von Markov-Ketten

- ▶ **Irreduzibilität:** Von jedem Zustand kann man jeden anderen erreichen
- ▶ **Aperiodizität:** Rückkehr zu einem Zustand nicht nur in festen Zeitabständen
- ▶ **Absorbierende Zustände:** Zustände, die nicht mehr verlassen werden
- ▶ **Rekurrenz:** Wahrscheinlichkeit, wieder in einen Zustand zurückzukehren
- ▶ **Transienz:** Zustände, die irgendwann nicht mehr erreicht werden

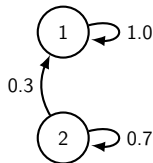
Eigenschaften von Markov-Ketten

- ▶ **Irreduzibilität:** Von jedem Zustand kann man jeden anderen erreichen
- ▶ **Aperiodizität:** Rückkehr zu einem Zustand nicht nur in festen Zeitabständen
- ▶ **Absorbierende Zustände:** Zustände, die nicht mehr verlassen werden
- ▶ **Rekurrenz:** Wahrscheinlichkeit, wieder in einen Zustand zurückzukehren
- ▶ **Transienz:** Zustände, die irgendwann nicht mehr erreicht werden
- ▶ **Ergodizität:** Positive Rekurrenz und Aperiodizität

Absorbierende Zustände

Beispiel:

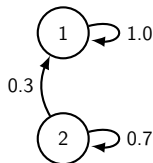
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$



Absorbierende Zustände

Beispiel:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$



- ▶ Zustand 1 ist **absorbierend**: $P_{1,1} = 1$
- ▶ Wenn die Kette in Zustand 1 ist, bleibt sie dort für immer
- ▶ Zustand 2 ist **transient**: Irgendwann wird er verlassen und nie wieder erreicht

Grenzen von Markov-Ketten

- ▶ **Markov-Eigenschaft:** Nicht immer realistisch, manchmal hängt die Zukunft von mehr als nur dem aktuellen Zustand ab

Grenzen von Markov-Ketten

- ▶ **Markov-Eigenschaft:** Nicht immer realistisch, manchmal hängt die Zukunft von mehr als nur dem aktuellen Zustand ab
- ▶ **Feste Übergangswahrscheinlichkeiten:** In der Realität können sich Wahrscheinlichkeiten ändern

Grenzen von Markov-Ketten

- ▶ **Markov-Eigenschaft:** Nicht immer realistisch, manchmal hängt die Zukunft von mehr als nur dem aktuellen Zustand ab
- ▶ **Feste Übergangswahrscheinlichkeiten:** In der Realität können sich Wahrscheinlichkeiten ändern
- ▶ **Komplexe Abhängigkeiten:** Können nicht abgebildet werden

Grenzen von Markov-Ketten

- ▶ **Markov-Eigenschaft:** Nicht immer realistisch, manchmal hängt die Zukunft von mehr als nur dem aktuellen Zustand ab
- ▶ **Feste Übergangswahrscheinlichkeiten:** In der Realität können sich Wahrscheinlichkeiten ändern
- ▶ **Komplexe Abhängigkeiten:** Können nicht abgebildet werden
- ▶ **Zustandsraum:** Bei vielen Zuständen wird die Berechnung aufwändig

Grenzen von Markov-Ketten

- ▶ **Markov-Eigenschaft:** Nicht immer realistisch, manchmal hängt die Zukunft von mehr als nur dem aktuellen Zustand ab
- ▶ **Feste Übergangswahrscheinlichkeiten:** In der Realität können sich Wahrscheinlichkeiten ändern
- ▶ **Komplexe Abhängigkeiten:** Können nicht abgebildet werden
- ▶ **Zustandsraum:** Bei vielen Zuständen wird die Berechnung aufwändig
- ▶ **Keine Kausalität:** Beschreiben nur Wahrscheinlichkeiten, keine Ursachen

App-Nutzung: Stationäre Verteilung

Für die App-Nutzung: $P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$

1. Aus $\pi_1 = 0.7\pi_1 + 0.3\pi_2$ folgt $0.3\pi_1 = 0.3\pi_2 \rightarrow \pi_1 = \pi_2$

App-Nutzung: Stationäre Verteilung

Für die App-Nutzung: $P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$

1. Aus $\pi_1 = 0.7\pi_1 + 0.3\pi_2$ folgt $0.3\pi_1 = 0.3\pi_2 \rightarrow \pi_1 = \pi_2$
2. Mit $\pi_1 + \pi_2 = 1$ folgt $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$

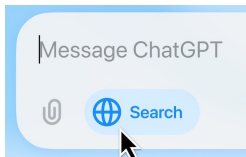
App-Nutzung: Stationäre Verteilung

Für die App-Nutzung: $P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$

1. Aus $\pi_1 = 0.7\pi_1 + 0.3\pi_2$ folgt $0.3\pi_1 = 0.3\pi_2 \rightarrow \pi_1 = \pi_2$
2. Mit $\pi_1 + \pi_2 = 1$ folgt $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$

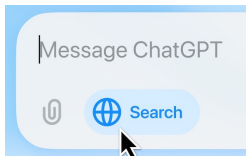
Langfristig werden beide Apps gleich häufig genutzt.

Anwendungen von Markov-Ketten



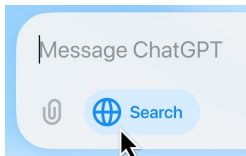
- ▶ **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen

Anwendungen von Markov-Ketten



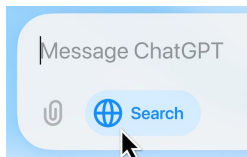
- ▶ **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- ▶ **Wettervorhersage**

Anwendungen von Markov-Ketten



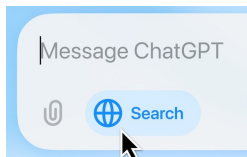
- ▶ **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- ▶ **Wettervorhersage**
- ▶ **PageRank-Algorithmus** von Google

Anwendungen von Markov-Ketten



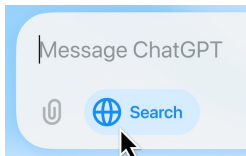
- ▶ **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- ▶ **Wettervorhersage**
- ▶ **PageRank-Algorithmus** von Google
- ▶ **Biologische Systeme** (Gensequenzen)

Anwendungen von Markov-Ketten



- ▶ **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
 - ▶ **Wettervorhersage**
 - ▶ **PageRank-Algorithmus** von Google
 - ▶ **Biologische Systeme** (Gensequenzen)
- ▶ **Finanzmodelle** (Aktienkurse)

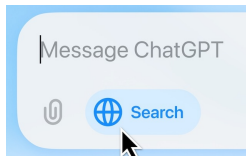
Anwendungen von Markov-Ketten



- ▶ **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- ▶ **Wettervorhersage**
- ▶ **PageRank-Algorithmus** von Google
- ▶ **Biologische Systeme** (Gensequenzen)

- ▶ **Finanzmodelle** (Aktienkurse)
- ▶ **Verkehrssimulationen**

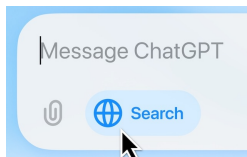
Anwendungen von Markov-Ketten



- ▶ **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- ▶ **Wettervorhersage**
- ▶ **PageRank-Algorithmus** von Google
- ▶ **Biologische Systeme** (Gensequenzen)

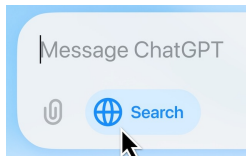
- ▶ **Finanzmodelle** (Aktienkurse)
- ▶ **Verkehrssimulationen**
- ▶ **Warteschlangensysteme**

Anwendungen von Markov-Ketten



- ▶ **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- ▶ **Wettervorhersage**
- ▶ **PageRank-Algorithmus** von Google
- ▶ **Biologische Systeme** (Gensequenzen)
- ▶ **Finanzmodelle** (Aktienkurse)
- ▶ **Verkehrssimulationen**
- ▶ **Warteschlangensysteme**
- ▶ **Spieltheorie** (Entscheidungsprozesse)

Anwendungen von Markov-Ketten



- ▶ **Textgenerierung** in ChatGPT und anderen KI-Modellen
- ▶ **Wettervorhersage**
- ▶ **PageRank-Algorithmus** von Google
- ▶ **Biologische Systeme** (Gensequenzen)
- ▶ **Finanzmodelle** (Aktienkurse)
- ▶ **Verkehrssimulationen**
- ▶ **Warteschlangensysteme**
- ▶ **Spieltheorie** (Entscheidungsprozesse)
- ▶ ...

Textvorhersage mit Markov-Ketten

- ▶ Markov-Ketten können genutzt werden, um **Texte zu generieren**.

Beispiel:

Ich mag Pizza und ich mag Pasta.

Textvorhersage mit Markov-Ketten

- ▶ Markov-Ketten können genutzt werden, um **Texte zu generieren**.
- ▶ Die Idee: Jedes Wort (oder Zeichen) ist ein Zustand.

Beispiel:

Ich mag Pizza und ich mag Pasta.

Textvorhersage mit Markov-Ketten

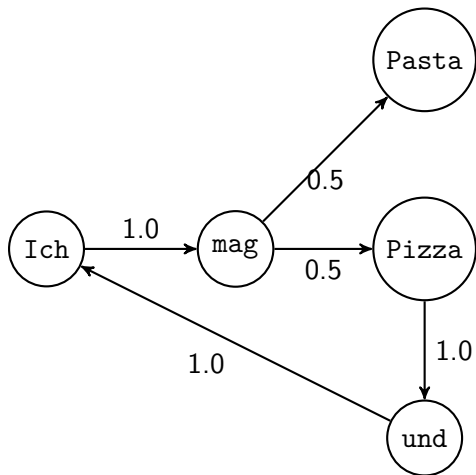
- ▶ Markov-Ketten können genutzt werden, um **Texte zu generieren**.
- ▶ Die Idee: Jedes Wort (oder Zeichen) ist ein Zustand.
- ▶ Die Wahrscheinlichkeit für das nächste Wort hängt nur vom aktuellen Wort ab.

Beispiel:

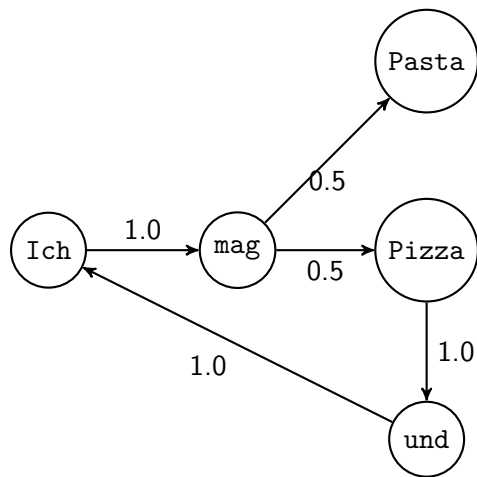
Ich mag Pizza und ich mag Pasta.

- ▶ Übergänge (vereinfacht):
Ich → mag → Pizza → und → ich → mag → Pasta

Visualisierung: Markov-Kette für Text



Visualisierung: Markov-Kette für Text



- ▶ Jeder Pfeil steht für eine mögliche Fortsetzung im Text.
- ▶ Die Wahrscheinlichkeiten werden aus Beispielsätzen gezählt.

Kurze Textgenerierung (Beispiel)

▶ Start: Ich

Mögliche generierte Sätze:

Ich mag Pizza und ich mag Pasta.

Ich mag Pasta.

Kurze Textgenerierung (Beispiel)

- ▶ Start: Ich
- ▶ Nächstes Wort: mag

Mögliche generierte Sätze:

Ich mag Pizza und ich mag Pasta.

Ich mag Pasta.

Kurze Textgenerierung (Beispiel)

- ▶ Start: Ich
- ▶ Nächstes Wort: mag
- ▶ Danach: zufällig Pizza oder Pasta

Mögliche generierte Sätze:

Ich mag Pizza und ich mag Pasta.

Ich mag Pasta.

Kurze Textgenerierung (Beispiel)

- ▶ Start: Ich
- ▶ Nächstes Wort: mag
- ▶ Danach: zufällig Pizza oder Pasta
- ▶ usw.

Mögliche generierte Sätze:

Ich mag Pizza und ich mag Pasta.

Ich mag Pasta.

Kurze Textgenerierung (Beispiel)

- ▶ Start: Ich
- ▶ Nächstes Wort: mag
- ▶ Danach: zufällig Pizza oder Pasta
- ▶ usw.

Mögliche generierte Sätze:

Ich mag Pizza und ich mag Pasta.

Ich mag Pasta.

Markov-Ketten können einfache, aber oft überraschende Texte erzeugen!

▶  Text-Generierung mit Markov-Ketten

▶  Challenge: 1.3

Lernkontrolle: Markov-Ketten für Text

Aufgabe 0.1

Hallo Welt Info Hallo Info Welt Hallo Hallo Welt Info
Info Welt Hallo

1. Leiten Sie aus dem Text eine Übergangsmatrix für die Wörter Hallo, Welt und Info her.
2. Was ist der wahrscheinlichste Text mit 3 Wörtern, wenn Sie mit Hallo starten?

Hinweis: Überlegen Sie sich sinnvolle Übergangswahrscheinlichkeiten!

1. Übergangszählung:

	Hallo	Welt	Info
Hallo (5x)	1	2	1
Welt (4x)	2	0	2
Info (4x)	1	2	1

Übergangsmatrix:

Für jede Zeile normieren wir auf die Summe der Übergänge von diesem Wort:

$$P = \begin{pmatrix} & \text{Hallo} & \text{Welt} & \text{Info} \\ \text{Hallo} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \text{Welt} & \frac{2}{4} & 0 & \frac{2}{4} \\ \text{Info} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2. Wahrscheinlichster Text mit 3 Wörtern, Start Hallo:

Von Hallo aus ist der wahrscheinlichste Übergang zu Welt (2 von 4 Übergängen), danach von Welt zu Hallo oder Info (je 2 von 4 Übergängen).

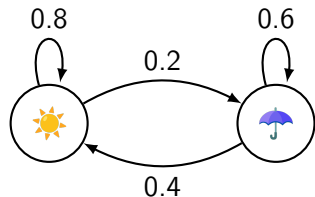
▶ Hallo → Welt (0.5), dann Welt → Hallo (0.5):

Hallo Welt Hallo

▶ Hallo → Welt (0.5), dann Welt → Info (0.5):

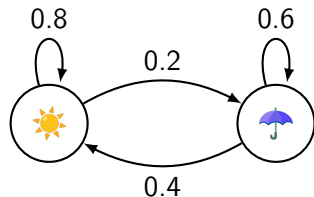
Visualisierung von Markov-Ketten

Markov-Ketten können als **gerichtete Graphen** dargestellt werden:



Visualisierung von Markov-Ketten

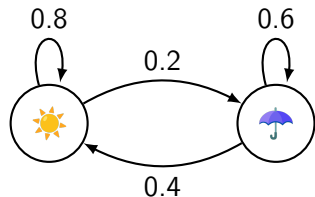
Markov-Ketten können als **gerichtete Graphen** dargestellt werden:



○ **Knoten** = Zustände

Visualisierung von Markov-Ketten

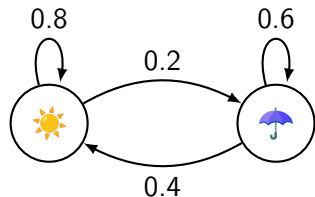
Markov-Ketten können als **gerichtete Graphen** dargestellt werden:



- **Knoten** = Zustände
- ➔ **Kanten** = Übergänge
mit Wahrscheinlichkeiten

Visualisierung von Markov-Ketten

Markov-Ketten können als **gerichtete Graphen** dargestellt werden:

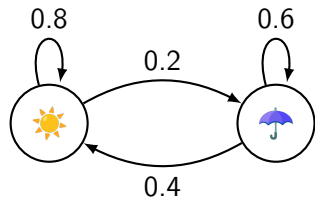


- **Knoten** = Zustände
- ➔ **Kanten** = Übergänge
mit Wahrscheinlichkeiten

Summe der ausgehenden
Kanten = 1!

Visualisierung von Markov-Ketten

Markov-Ketten können als **gerichtete Graphen** dargestellt werden:



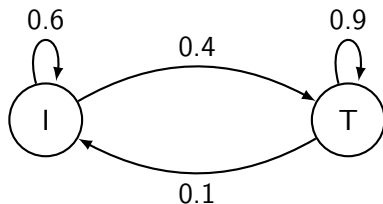
- **Knoten** = Zustände
- **Kanten** = Übergänge mit Wahrscheinlichkeiten

Summe der ausgehenden Kanten = 1!

Aufgabe 0.2

Jedes Mal, wenn Sie Instagram (**I**) benutzen, benutzen Sie als nächste App zu **60%** nochmals Instagram, und wechseln auf TikTok (**T**) mit **40%**. Wenn Sie zuerst TikTok benutzen, wechseln Sie zu **10%** zu Instagram und bleiben zu **90%** auf TikTok. Erstellen Sie den **gerichteten Graphen** für die Zustände **I** und **T**.

Gerichteter Graph: Social-Media-App-Nutzung



Gerichteter Graph für **Instagram (I)** und **TikTok (T)**

Stationäre Verteilung

Definition (Stationäre Verteilung)

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ heisst **stationäre Verteilung** einer Markov-Kette mit Übergangsmatrix P , wenn gilt:

$$\pi = \pi \cdot P$$

⇒ Langfristige, stabile Verteilung der Wahrscheinlichkeiten

Stationäre Verteilung

Definition (Stationäre Verteilung)

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ heisst **stationäre Verteilung** einer Markov-Kette mit Übergangsmatrix P , wenn gilt:

$$\pi = \pi \cdot P$$

- ⇒ Langfristige, stabile Verteilung der Wahrscheinlichkeiten
- ⇒ Bleibt nach Multiplikation mit P unverändert

Berechnung der stationären Verteilung (Wetter-Beispiel)

1. $\pi = \pi \cdot P$ aufstellen:

$$(\pi_{\text{☀}}, \pi_{\text{☂}}) = (\pi_{\text{☀}}, \pi_{\text{☂}}) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Berechnung der stationären Verteilung (Wetter-Beispiel)

1. $\pi = \pi \cdot P$ aufstellen:

$$(\pi_{\text{☀}}, \pi_{\text{☂}}) = (\pi_{\text{☀}}, \pi_{\text{☂}}) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

2. Gleichungen aufstellen:

$$\pi_{\text{☀}} = \pi_{\text{☀}} \cdot 0.8 + \pi_{\text{☂}} \cdot 0.4$$

$$\pi_{\text{☂}} = \pi_{\text{☀}} \cdot 0.2 + \pi_{\text{☂}} \cdot 0.6$$

Berechnung der stationären Verteilung (Wetter-Beispiel)

1. $\pi = \pi \cdot P$ aufstellen:

$$(\pi_{\text{☀}}, \pi_{\text{☂}}) = (\pi_{\text{☀}}, \pi_{\text{☂}}) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

2. Gleichungen aufstellen:

$$\pi_{\text{☀}} = \pi_{\text{☀}} \cdot 0.8 + \pi_{\text{☂}} \cdot 0.4$$

$$\pi_{\text{☂}} = \pi_{\text{☀}} \cdot 0.2 + \pi_{\text{☂}} \cdot 0.6$$

3. Umformen:

$$\pi_{\text{☀}} \cdot 0.2 = \pi_{\text{☂}} \cdot 0.4$$

$$\Rightarrow \pi_{\text{☀}} = 2 \cdot \pi_{\text{☂}}$$

Berechnung der stationären Verteilung (Wetter-Beispiel)

1. $\pi = \pi \cdot P$ aufstellen:

$$(\pi_{\text{☀}}, \pi_{\text{☂}}) = (\pi_{\text{☀}}, \pi_{\text{☂}}) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

2. Gleichungen aufstellen:

$$\pi_{\text{☀}} = \pi_{\text{☀}} \cdot 0.8 + \pi_{\text{☂}} \cdot 0.4$$

$$\pi_{\text{☂}} = \pi_{\text{☀}} \cdot 0.2 + \pi_{\text{☂}} \cdot 0.6$$

3. Umformen:

$$\pi_{\text{☀}} \cdot 0.2 = \pi_{\text{☂}} \cdot 0.4$$

$$\Rightarrow \pi_{\text{☀}} = 2 \cdot \pi_{\text{☂}}$$

4. Normierung:

$$\pi_{\text{☀}} + \pi_{\text{☂}} = 1$$

$$2 \cdot \pi_{\text{☂}} + \pi_{\text{☂}} = 1$$

$$3 \cdot \pi_{\text{☂}} = 1$$

$$\pi_{\text{☂}} = \frac{1}{3}$$

Berechnung der stationären Verteilung (Wetter-Beispiel)

1. $\pi = \pi \cdot P$ aufstellen:

$$(\pi_{\text{☀}}, \pi_{\text{☂}}) = (\pi_{\text{☀}}, \pi_{\text{☂}}) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

2. Gleichungen aufstellen:

$$\pi_{\text{☀}} = \pi_{\text{☀}} \cdot 0.8 + \pi_{\text{☂}} \cdot 0.4$$

$$\pi_{\text{☂}} = \pi_{\text{☀}} \cdot 0.2 + \pi_{\text{☂}} \cdot 0.6$$

3. Umformen:

$$\pi_{\text{☀}} \cdot 0.2 = \pi_{\text{☂}} \cdot 0.4$$

$$\Rightarrow \pi_{\text{☀}} = 2 \cdot \pi_{\text{☂}}$$

4. Normierung:

$$\pi_{\text{☀}} + \pi_{\text{☂}} = 1$$

$$2 \cdot \pi_{\text{☂}} + \pi_{\text{☂}} = 1$$

$$3 \cdot \pi_{\text{☂}} = 1$$

$$\pi_{\text{☂}} = \frac{1}{3}$$

5. Ergebnis:

$$\pi_{\text{☀}} = \frac{2}{3}$$

$$\pi_{\text{☂}} = \frac{1}{3}$$

Berechnung der stationären Verteilung (Wetter-Beispiel)

1. $\pi = \pi \cdot P$ aufstellen:

$$(\pi_{\text{☀}}, \pi_{\text{☂}}) = (\pi_{\text{☀}}, \pi_{\text{☂}}) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

2. Gleichungen aufstellen:

$$\pi_{\text{☀}} = \pi_{\text{☀}} \cdot 0.8 + \pi_{\text{☂}} \cdot 0.4$$

$$\pi_{\text{☂}} = \pi_{\text{☀}} \cdot 0.2 + \pi_{\text{☂}} \cdot 0.6$$

3. Umformen:

$$\pi_{\text{☀}} \cdot 0.2 = \pi_{\text{☂}} \cdot 0.4$$

$$\Rightarrow \pi_{\text{☀}} = 2 \cdot \pi_{\text{☂}}$$

4. Normierung:

$$\pi_{\text{☀}} + \pi_{\text{☂}} = 1$$

$$2 \cdot \pi_{\text{☂}} + \pi_{\text{☂}} = 1$$

$$3 \cdot \pi_{\text{☂}} = 1$$

$$\pi_{\text{☂}} = \frac{1}{3}$$

5. Ergebnis:

$$\pi_{\text{☀}} = \frac{2}{3}$$

$$\pi_{\text{☂}} = \frac{1}{3}$$

⇒ **Langfristig ist es an 2/3 der Tage sonnig und an 1/3 der Tage regnerisch.**