Kantonsschule Im Lee

Informatik: Data Science und Sicherheit

Zahlensysteme ✏️: Lektion 02

Weshalb unterschiedliche Zahlensysteme?

- Zahlensysteme sind „willkürlich“ und historisch entstanden
- Computer arbeiten mit binären Zahlen $\{0,1\}$
  - Schnelleres Rechnen
  - ⚡ $1 =$ Strom fliesst, $0 =$ kein Strom

Stellenwertdarstellung

Allgemeine Beobachtungen

- Buchstaben von „normalem“ Zahlensystem:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

  - 10-adisches Zahlensystem, da 10 Zeichen
  - Dezimalsystem (von lateinisch *decem* $\rightarrow$ „zehn“)
- Buchstaben von „binärem“ Zahlensystem:

$$\{0, 1\}$$

  - 2-adisches Zahlensystem, da 2 Zeichen
  - Binärsystem (von lateinisch *binarius* $\rightarrow$ „zweifach“)

Stellenwertdarstellung

Allgemeine Beobachtungen

- Da das dezimale Alphabet aus 10 Buchstaben besteht, können wir die Zahl 4605 zur Klarheit auch als 4605_{10} schreiben.

Dezimal ($\{0, 1, ..., 9\}$)	**Binär** ($\{0, 1\}$)
$0 \quad (= 0_{10})$	$?_2$
$1 \quad (= 1_{10})$	$?_2$
$2 \quad (= 2_{10})$	$?_2$
$3 \quad (= 3_{10})$	$?_2$
$4 \quad (= 4_{10})$	$?_2$
...	...

Stellenwertdarstellung

Allgemeine Beobachtungen

- Da das dezimale Alphabet aus 10 Buchstaben besteht, können wir die Zahl 4605 zur Klarheit auch als 4605_{10} schreiben.

Dezimal ($\{0, 1, \ldots, 9\}$)	**Binär** ($\{0, 1\}$)
0 $(= 0_{10})$	0_2
1 $(= 1_{10})$	1_2
2 $(= 2_{10})$	10_2
3 $(= 3_{10})$	11_2
4 $(= 4_{10})$	100_2
...	...

Stellenwertdarstellung

Allgemeine Beobachtungen

- Da das dezimale Alphabet aus 10 Buchstaben besteht, können wir die Zahl 4605 zur Klarheit auch als 4605_{10} schreiben.

Dezimal ($\{0, 1, ..., 9\}$)	**Binär** ($\{0, 1\}$)
0 $(= 0_{10})$	0_2
1 $(= 1_{10})$	1_2
2 $(= 2_{10})$	10_2
3 $(= 3_{10})$	11_2
4 $(= 4_{10})$	100_2
...	...

- Wie kann man Zahlen allgemein vom einen System in ein anderes Transformieren?
  $\rightarrow$ *b*-adische Zahlensysteme!

Stellenwertdarstellung und b-adische Systeme

- Das Dezimalsystem hat die Basisgrössen

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \ldots$$

Beispiel: Das Wort 4605_{10} wird interpretiert als die Zahl

$$\underbrace{\ldots}_{?}\underbrace{10^3}_{?} + \underbrace{\ldots}_{?}\underbrace{10^2}_{?} + \underbrace{\ldots}_{?}\underbrace{10^1}_{?} + \underbrace{\ldots}_{?}\underbrace{10^0}_{?}.$$

Stellenwertdarstellung und *b*-adische Systeme

- Das Dezimalsystem hat die Basisgrössen

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \ldots$$

Beispiel: Das Wort 4605_{10} wird interpretiert als die Zahl

$$\underbrace{\ldots}_{?}\underbrace{10^3}_{1000} + \underbrace{\ldots}_{?}\underbrace{10^2}_{100} + \underbrace{\ldots}_{?}\underbrace{10^1}_{10} + \underbrace{\ldots}_{?}\underbrace{10^0}_{1}.$$

Stellenwertdarstellung und b-adische Systeme

- Das Dezimalsystem hat die Basisgrössen

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \ldots$$

Beispiel: Das Wort 4605_{10} wird interpretiert als die Zahl

$$\underbrace{a_3}_{?} \cdot \underbrace{10^3}_{1000} + \underbrace{a_2}_{?} \cdot \underbrace{10^2}_{100} + \underbrace{a_1}_{?} \cdot \underbrace{10^1}_{10} + \underbrace{a_0}_{?} \cdot \underbrace{10^0}_{1}.$$

Stellenwertdarstellung und b-adische Systeme

- Das Dezimalsystem hat die Basisgrössen

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \ldots$$

Beispiel: Das Wort 4605_{10} wird interpretiert als die Zahl

$$4 \cdot \underbrace{10^3}_{1000} + 6 \cdot \underbrace{10^2}_{100} + 0 \cdot \underbrace{10^1}_{10} + 5 \cdot \underbrace{10^0}_{1}.$$

Stellenwertdarstellung und *b*-adische Systeme

- Das Dezimalsystem hat die Basisgrössen

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \ldots$$

Beispiel: Das Wort 4605_{10} wird interpretiert als die Zahl

$$4 \cdot \underbrace{10^3}_{1000} + 6 \cdot \underbrace{10^2}_{100} + 0 \cdot \underbrace{10^1}_{10} + 5 \cdot \underbrace{10^0}_{1}.$$

=vier Tausender + sechs Hunderter + null Zehner + fünf Einer.

Stellenwertdarstellung und b-adische Systeme

- Das Dezimalsystem hat die Basisgrössen

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \ldots$$

Beispiel: Das Wort 4605_{10} wird interpretiert als die Zahl

$$4 \cdot \underbrace{10^3}_{1000} + 6 \cdot \underbrace{10^2}_{100} + 0 \cdot \underbrace{10^1}_{10} + 5 \cdot \underbrace{10^0}_{1}.$$

$=$vier Tausender $+$ sechs Hunderter $+$ null Zehner $+$ fünf Einer.

- Das Binärsystem hat die Basisgrössen

$$2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \ldots$$

- Allgemein: Das b-adische System hat die Basisgrössen

$$b^0, \quad b^1, \quad b^2, \quad b^3, \ldots$$

Stellenwertdarstellung

Übung

1. Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = a_3 \cdot \underbrace{10^3}_{=1000} + a_2 \cdot \underbrace{10^2}_{=100} + a_1 \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + a_0 \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

Stellenwertdarstellung

Übung

1. Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = \cancel{\overbrace{0}^{=a_3} \cdot \underbrace{10^3}_{=1000}} + \cancel{\overbrace{0}^{=a_2} \cdot \underbrace{10^2}_{=100}} + \overbrace{2}^{=a_1} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overbrace{9}^{=a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

Stellenwertdarstellung

Übung

1. Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = \cancel{\overbrace{0}^{=a_3} \cdot \underbrace{10^3}_{=1000}} + \cancel{\overbrace{0}^{=a_2} \cdot \underbrace{10^2}_{=100}} + \overbrace{2}^{=a_1} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overbrace{9}^{=a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

2. Wandeln Sie die Zahl vom 10-adischen ins 2-adische System um (also von dezimal zu binär)

$$29_{10} = ?_2$$

Stellenwertdarstellung
Übung

1. Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = \cancel{\overbrace{0}^{=a_3} \cdot \underbrace{10^3}_{=1000}} + \cancel{\overbrace{0}^{=a_2} \cdot \underbrace{10^2}_{=100}} + \overbrace{2}^{=a_1} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overbrace{9}^{=a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

2. Wandeln Sie die Zahl vom 10-adischen ins 2-adische System um (also von dezimal zu binär)

$$a_4 \cdot \underbrace{2^4}_{=?} + a_3 \cdot \underbrace{2^3}_{=?} + a_2 \cdot \underbrace{2^2}_{=?} + a_1 \cdot \underbrace{2^1}_{=?} + a_0 \cdot \underbrace{2^0}_{=?}.$$

Stellenwertdarstellung

Übung

1. Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = \cancel{\overbrace{0}^{=a_3} \cdot \underbrace{10^3}_{=1000}} + \cancel{\overbrace{0}^{=a_2} \cdot \underbrace{10^2}_{=100}} + \overbrace{2}^{=a_1} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overbrace{9}^{=a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

2. Wandeln Sie die Zahl vom 10-adischen ins 2-adische System um (also von dezimal zu binär)

$$a_4 \cdot \underbrace{2^4}_{=16} + a_3 \cdot \underbrace{2^3}_{=8} + a_2 \cdot \underbrace{2^2}_{=4} + a_1 \cdot \underbrace{2^1}_{=2} + a_0 \cdot \underbrace{2^0}_{=1}.$$

Stellenwertdarstellung

Übung

1. Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = \cancel{\overbrace{0}^{=a_3} \cdot \underbrace{10^3}_{=1000}} + \cancel{\overbrace{0}^{=a_2} \cdot \underbrace{10^2}_{=100}} + \overbrace{2}^{=a_1} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overbrace{9}^{=a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

2. Wandeln Sie die Zahl vom 10-adischen ins 2-adische System um (also von dezimal zu binär)

$$\overbrace{1}^{=a_4} \cdot \underbrace{2^4}_{=16} + \overbrace{1}^{=a_3} \cdot \underbrace{2^3}_{=8} + \overbrace{1}^{=a_2} \cdot \underbrace{2^2}_{=4} + \overbrace{0}^{=a_1} \cdot \underbrace{2^1}_{=2} + \overbrace{1}^{=a_0} \cdot \underbrace{2^0}_{=1}.$$

Stellenwertdarstellung

Übung

1. Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = \cancel{\overbrace{0}^{=a_3} \cdot \underbrace{10^3}_{=1000}} + \cancel{\overbrace{0}^{=a_2} \cdot \underbrace{10^2}_{=100}} + \overbrace{2}^{=a_1} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overbrace{9}^{=a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

2. Wandeln Sie die Zahl vom 10-adischen ins 2-adische System um (also von dezimal zu binär)

$$\overbrace{1}^{=a_4} \cdot \underbrace{2^4}_{=16} + \overbrace{1}^{=a_3} \cdot \underbrace{2^3}_{=8} + \overbrace{1}^{=a_2} \cdot \underbrace{2^2}_{=4} + \overbrace{0}^{=a_1} \cdot \underbrace{2^1}_{=2} + \overbrace{1}^{=a_0} \cdot \underbrace{2^0}_{=1}.$$

3. Das Resultat ist also 11101_2

Stellenwertdarstellung

Übung

1. Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = \cancel{\overbrace{0}^{=a_3} \cdot \underbrace{10^3}_{=1000}} + \cancel{\overbrace{0}^{=a_2} \cdot \underbrace{10^2}_{=100}} + \overbrace{2}^{=a_1} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overbrace{9}^{=a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

2. Wandeln Sie die Zahl vom 10-adischen ins 2-adische System um (also von dezimal zu binär)

$$\overbrace{1}^{=a_4} \cdot \underbrace{2^4}_{=16} + \overbrace{1}^{=a_3} \cdot \underbrace{2^3}_{=8} + \overbrace{1}^{=a_2} \cdot \underbrace{2^2}_{=4} + \overbrace{0}^{=a_1} \cdot \underbrace{2^1}_{=2} + \overbrace{1}^{=a_0} \cdot \underbrace{2^0}_{=1}.$$

3. Das Resultat ist also 11101_2
4. Man nennt dieses Verfahren ***greedy*** („gierig“)

Aufgaben

Skript „Zahlensysteme und Kodierungen“ (auf Moodle)

- Aufgaben 1.2, 1.3, 1.4

Stellenwertdarstellung

Verallgemeinerung

Seien $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ natürliche Zahlen. Dann stellt das Wort

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$$

(definitionsgemäss) die Zahl

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

dar.

$$\textit{Beispiel} : 4605 = \overbrace{4}^{=a_3} \cdot \underbrace{10^3}_{=1000} + \overbrace{6}^{=a_2} \cdot \underbrace{10^2}_{=100} + \overbrace{0}^{=a_1} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overbrace{5}^{=a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

Stellenwertdarstellung

Verallgemeinerung

Allgemein repräsentiert das Wort

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

in der b-adischen Darstellung (Basisgrösse b) die Zahl

$$a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0.$$

Beispiel für $b = 3$

- Buchstaben $= \{0, 1, 2\}$
- Die Zahl 23_{10} wird folgendermassen in das 3-adische System übersetzt:

$$23_{10} = \underbrace{\overbrace{2}^{=a_2} \cdot \underbrace{3^2}_{9}}_{18} + \underbrace{\overbrace{1}^{=a_1} \cdot \underbrace{3^1}_{3}}_{3} + \underbrace{\overbrace{2}^{=a_0} \cdot \underbrace{3^0}_{1}}_{2}.$$

Ziffern

Die (nicht notwendigerweise verschiedenen) natürlichen Zahlen $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ werden ***Ziffern*** genannt.

Wichtige Beobachtung zu Ziffern

Eine kürzeste Darstellung im b-adischen System ist immer ein Wort über dem Alphabet

$$\{0, 1, 2, \ldots, b - 1\}\,.$$

Die höchste mögliche (sinnvolle) Ziffer ist also $b - 1$ (zum Beispiel ist $9 = 10 - 1$ die grösste Ziffer im Zehnersystem oder $1 = 2 - 1$ die grösste Ziffer im Binärsystem).

Skript „Zahlensysteme und Kodierungen“ (auf Moodle)

- Aufgaben 1.5 bis 1.7, 1.9, 1.10
- Challenge: Aufgaben 1.8

Appendix

Definitionen

Alphabete und Buchstaben

- ***Alphabet*** = endliche, nicht leere Menge von Zeichen zur Informationsdarstellung

Definitionen

Alphabete und Buchstaben

- ***Alphabet*** = endliche, nicht leere Menge von Zeichen zur Informationsdarstellung
- ***Buchstaben*** = Elemente eines Alphabets

Definitionen

Alphabete: Beispiele

- Das lateinische Alphabet:

$$\{A, B, C, \ldots, Z\}$$

- Das lateinische Alphabet:

$$\{A, B, C, \ldots, Z\}$$

- Das Alphabet der Tastatur:

$$\{a, b, c, ..., z, A, B, C, ..., Z, \sqcup, >, <, (,), ..., \#, ?, !\}$$

Definitionen

Alphabete: Beispiele

- Das lateinische Alphabet:

$$\{A, B, C, \ldots, Z\}$$

- Das Alphabet der Tastatur:

$$\{a, b, c, ..., z, A, B, C, ..., Z, \sqcup, >, <, (,), ..., \#, ?, !\}$$

- Das binäre Alphabet:

$$\{0, 1\}$$

Definitionen

Wörter

- ***Wort*** über ein Alphabet A = eine beliebige endliche Folge von Buchstaben aus A.

Definitionen

Wörter

- ***Wort*** über ein Alphabet $A =$ eine beliebige endliche Folge von Buchstaben aus A.
- ***Länge eines Worts*** $=$ die Anzahl der Buchstaben in diesem Wort.

Definitionen

Wörter

- ***Wort*** über ein Alphabet $A =$ eine beliebige endliche Folge von Buchstaben aus A.
- ***Länge eines Worts*** $=$ die Anzahl der Buchstaben in diesem Wort.
- Z.B: $0, 1, 1, 1, 0, 1 =$ ein Wort der Länge 6 über dem binären Alphabet.

Wörter

- Kommas werden bei Wörtern weggelassen (011101 anstelle von $0, 1, 1, 1, 0, 1$)

Wörter

- Kommas werden bei Wörtern weggelassen (011101 anstelle von $0, 1, 1, 1, 0, 1$)
- $GLKK$ = Wort der Länge 4 über dem lateinischen Alphabet.

Wörter

- Kommas werden bei Wörtern weggelassen (011101 anstelle von $0, 1, 1, 1, 0, 1$)
- $GLKK$ = Wort der Länge 4 über dem lateinischen Alphabet.
- Ist uh01 ein Wort über dem binären Alphabet?