Kantonsschule Im Lee

Informatik: Data Science und Sicherheit

Zahlensysteme ✏️: Lektion 03

Stellenwertdarstellung & b-adische Zahlensysteme

- Das Dezimalsystem hat die Basisgrössen

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \ldots$$

- Das Binärsystem hat die Basisgrössen

$$2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \ldots$$

- Allgemein: Das b-adische System hat die Basisgrössen

$$b^0, \quad b^1, \quad b^2, \quad b^3, \ldots$$

Beispiel: Das Wort 4605_{10} wird interpretiert als die Zahl

$$4 \cdot \underbrace{10^3}_{1000} + 6 \cdot \underbrace{10^2}_{100} + 0 \cdot \underbrace{10^1}_{10} + 5 \cdot \underbrace{10^0}_{1}.$$

→ ***greedy***-Algorithmus, um Zahlen zu konvertieren

Kleine Mathe-Wiederholung 🤓📚

Wie kann man die Zahl umschreiben? $\rightarrow$ ***Wissenschaftliche Notation*** oder ***Exponentialdarstellung***

$$10^b \cdot a$$

Beispiel:

$$500.11 = 10^2 \cdot 5.0011$$

- $0.0003 = 10^b \cdot a$
- $5'000 = 10^b \cdot a$
- $10'003.3455 = 10^b \cdot a$

Kleine Mathe-Wiederholung 🤓📚

Wie kann man die Zahl umschreiben? $\rightarrow$ ***Wissenschaftliche Notation*** oder ***Exponentialdarstellung***

$$10^b \cdot a$$

Beispiel:

$$500.11 = 10^2 \cdot 5.0011$$

- $0.0003 = \underbrace{10^{-4}}_{=0.0001} \cdot 3$
- $5'000 = 10^b \cdot a$
- $10'003.3455 = 10^b \cdot a$

Kleine Mathe-Wiederholung 🤓📚

Wie kann man die Zahl umschreiben? → ***Wissenschaftliche Notation*** oder ***Exponentialdarstellung***

$$10^b \cdot a$$

Beispiel:

$$500.11 = 10^2 \cdot 5.0011$$

- $0.0003 = \underbrace{10^{-4}}_{=0.0001} \cdot 3$
- $5'000 = \underbrace{10^{3}}_{=1'000} \cdot 5$
- $10'003.3455 = 10^b \cdot a$

Kleine Mathe-Wiederholung 🤓📚

Wie kann man die Zahl umschreiben? → ***Wissenschaftliche Notation*** oder ***Exponentialdarstellung***

$$10^b \cdot a$$

Beispiel:

$$500.11 = 10^2 \cdot 5.0011$$

- $0.0003 = \underbrace{10^{-4}}_{=0.0001} \cdot 3$
- $5'000 = \underbrace{10^{3}}_{=1'000} \cdot 5$
- $10'003.3455 = \underbrace{10^{4}}_{=10'000} \cdot 1.0033455$

Stellenwertdarstellung

Beispiel

Frage: Wie stellen wir Kommazahlen dar? Z.B. 3.4375

Das Wort

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 . b_1 b_2 \ldots b_m$$

entspricht definitionsgemäss der Zahl

$$a_n \cdot d^n + a_{n-1} \cdot d^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot d^1 + a_0 \cdot d^0 +$$
$$b_1 \cdot d^{-1} + b_2 \cdot d^{-2} + \ldots + b_{m-1} \cdot d^{-m-1} + b_m \cdot d^{-m}$$

Stellenwertdarstellung

Beispiel

Frage: Wie stellen wir Kommazahlen dar? Z.B. 3.4375

Das Wort

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 . b_1 b_2 \ldots b_m$$

entspricht definitionsgemäss der Zahl

$$a_n \cdot d^n + a_{n-1} \cdot d^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot d^1 + a_0 \cdot d^0 +$$
$$b_1 \cdot d^{-1} + b_2 \cdot d^{-2} + \ldots + b_{m-1} \cdot d^{-m-1} + b_m \cdot d^{-m}$$

---

daher haben wir, im dezimalen Zahlensystem ($d = 10$):

$$a_1 \cdot \underbrace{10^0}_{?} + b_1 \cdot \underbrace{10^{-1}}_{?} + b_2 \cdot \underbrace{10^{-2}}_{?} + b_3 \cdot \underbrace{10^{-3}}_{?} + b_4 \cdot \underbrace{10^{-4}}_{?}$$

Stellenwertdarstellung

Beispiel

Frage: Wie stellen wir Kommazahlen dar? Z.B. 3.4375

Das Wort

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 . b_1 b_2 \ldots b_m$$

entspricht definitionsgemäss der Zahl

$$a_n \cdot d^n + a_{n-1} \cdot d^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot d^1 + a_0 \cdot d^0 +$$
$$b_1 \cdot d^{-1} + b_2 \cdot d^{-2} + \ldots + b_{m-1} \cdot d^{-m-1} + b_m \cdot d^{-m}$$

---

daher haben wir, im dezimalen Zahlensystem ($d = 10$):

$$a_1 \cdot \underbrace{10^0}_{1} + b_1 \cdot \underbrace{10^{-1}}_{0.1} + b_2 \cdot \underbrace{10^{-2}}_{0.01} + b_3 \cdot \underbrace{10^{-3}}_{0.001} + b_4 \cdot \underbrace{10^{-4}}_{0.0001}$$

Stellenwertdarstellung

Beispiel

Frage: Wie stellen wir Kommazahlen dar? Z.B. 3.4375

Das Wort

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 . b_1 b_2 \ldots b_m$$

entspricht definitionsgemäss der Zahl

$$a_n \cdot d^n + a_{n-1} \cdot d^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot d^1 + a_0 \cdot d^0 +$$
$$b_1 \cdot d^{-1} + b_2 \cdot d^{-2} + \ldots + b_{m-1} \cdot d^{-m-1} + b_m \cdot d^{-m}$$

---

daher haben wir, im dezimalen Zahlensystem ($d = 10$):

$$\overbrace{3}^{a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{1} + \overbrace{4}^{b_1} \cdot \underbrace{10^{-1}}_{0.1} + \overbrace{3}^{b_2} \cdot \underbrace{10^{-2}}_{0.01} + \overbrace{7}^{b_3} \cdot \underbrace{10^{-3}}_{0.001} + \overbrace{5}^{b_4} \cdot \underbrace{10^{-4}}_{0.0001}$$

Stellenwertdarstellung

Beispiel

Frage: Wie stellen wir Kommazahlen dar? Z.B. 3.4375

---

daher haben wir, im dezimalen Zahlensystem ($d = 10$):

$$\overbrace{3}^{a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{1} + \overbrace{4}^{b_1} \cdot \underbrace{10^{-1}}_{0.1} + \overbrace{3}^{b_2} \cdot \underbrace{10^{-2}}_{0.01} + \overbrace{7}^{b_3} \cdot \underbrace{10^{-3}}_{0.001} + \overbrace{5}^{b_4} \cdot \underbrace{10^{-4}}_{0.0001}$$

Im binären Zahlensystem ($d = 2$):

$$a_1 \cdot \underbrace{2^1}_{?} + a_0 \cdot \underbrace{2^0}_{?} + b_1 \cdot \underbrace{2^{-1}}_{?} + b_2 \cdot \underbrace{2^{-2}}_{?} + b_3 \cdot \underbrace{2^{-3}}_{?} + b_4 \cdot \underbrace{2^{-4}}_{?}$$

Stellenwertdarstellung

Beispiel

Frage: Wie stellen wir Kommazahlen dar? Z.B. 3.4375

---

daher haben wir, im dezimalen Zahlensystem ($d = 10$):

$$\overbrace{3}^{a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{1} + \overbrace{4}^{b_1} \cdot \underbrace{10^{-1}}_{0.1} + \overbrace{3}^{b_2} \cdot \underbrace{10^{-2}}_{0.01} + \overbrace{7}^{b_3} \cdot \underbrace{10^{-3}}_{0.001} + \overbrace{5}^{b_4} \cdot \underbrace{10^{-4}}_{0.0001}$$

Im binären Zahlensystem ($d = 2$):

$$a_1 \cdot \underbrace{2^1}_{2} + a_0 \cdot \underbrace{2^0}_{1} + b_1 \cdot \underbrace{2^{-1}}_{1/2=0.5} + b_2 \cdot \underbrace{2^{-2}}_{1/4=0.25} + b_3 \cdot \underbrace{2^{-3}}_{1/8=0.125} + b_4 \cdot \underbrace{2^{-4}}_{0.0625}$$

Stellenwertdarstellung

Beispiel

Frage: Wie stellen wir Kommazahlen dar? Z.B. 3.4375

---

daher haben wir, im dezimalen Zahlensystem ($d = 10$):

$$\overbrace{3}^{a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{1} + \overbrace{4}^{b_1} \cdot \underbrace{10^{-1}}_{0.1} + \overbrace{3}^{b_2} \cdot \underbrace{10^{-2}}_{0.01} + \overbrace{7}^{b_3} \cdot \underbrace{10^{-3}}_{0.001} + \overbrace{5}^{b_4} \cdot \underbrace{10^{-4}}_{0.0001}$$

Im binären Zahlensystem ($d = 2$):

$$1 \cdot \underbrace{2^1}_{2} + 1 \cdot \underbrace{2^0}_{1} + 0 \cdot \underbrace{2^{-1}}_{1/2=0.5} + 1 \cdot \underbrace{2^{-2}}_{1/4=0.25} + 1 \cdot \underbrace{2^{-3}}_{1/8=0.125} + 1 \cdot \underbrace{2^{-4}}_{0.0625}$$

Stellenwertdarstellung

Beispiel

Frage: Wie stellen wir Kommazahlen dar? Z.B. 3.4375

---

daher haben wir, im dezimalen Zahlensystem ($d = 10$):

$$\overbrace{3}^{a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{1} + \overbrace{4}^{b_1} \cdot \underbrace{10^{-1}}_{0.1} + \overbrace{3}^{b_2} \cdot \underbrace{10^{-2}}_{0.01} + \overbrace{7}^{b_3} \cdot \underbrace{10^{-3}}_{0.001} + \overbrace{5}^{b_4} \cdot \underbrace{10^{-4}}_{0.0001}$$

Im binären Zahlensystem ($d = 2$):

$$1 \cdot \underbrace{2^1}_{2} + 1 \cdot \underbrace{2^0}_{1} + 0 \cdot \underbrace{2^{-1}}_{1/2=0.5} + 1 \cdot \underbrace{2^{-2}}_{1/4=0.25} + 1 \cdot \underbrace{2^{-3}}_{1/8=0.125} + 1 \cdot \underbrace{2^{-4}}_{0.0625}$$

Wir wissen nun also, dass $3.4375_{10} = 11.0111_2$

Stellenwertdarstellung

Verallgemeinerung

Seien $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ natürliche Zahlen. Dann stellt das Wort

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$$

(definitionsgemäss) die Ganzzahl

$$a_n \cdot d^n + a_{n-1} \cdot d^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot d^1 + a_0 \cdot d^0$$

im d-adischen Zahlensystem dar.

Eine Nachkommazahl wird dargestellt wie folgt:

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 . b_1 b_2 \ldots b_m$$

und entspricht definitionsgemäss der Zahl

$$a_n \cdot d^n + a_{n-1} \cdot d^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot d^1 + a_0 \cdot d^0 +$$
$$b_1 \cdot d^{-1} + b_2 \cdot d^{-2} + \ldots + b_{m-1} \cdot d^{-m-1} + b_m \cdot d^{-m}$$

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

Einige Überlegungen

- Je nach Kommazahl finden müssen wir im binären System weit suchen gehen, bis wir die Zahl korrekt abgebildet haben
- Wie präzise sollen / können wir Zahlen abbilden?

Übungen

- Arbeiten Sie weiter an den Aufgaben von letztem Mal
  - (Auffrischung) Lesen Sie „Neue Konzepte und Begriffe“ auf S. 14.
  - Lösen Sie Aufgabe 1.11 (Hilfestellung: im 5-adischen Zahlensystem gibt es nur die Ziffern $\{0, 1, 2, 3, 4\}$)
  - Lesen Sie Beispiel 1.2 (Transformation von Zahlendarstellungen) und lösen Sie danach die Aufgabe 1.12.
- (Auffrischung) Lesen Sie „Neue Konzepte und Begriffe“ auf S. 24.
- 1.28 a und b
- Helfen Sie anderen!

Anhang (optional)

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

Präzision von Kommazahlen (Übung 1.31)

- Angenommen, wir haben 20 bits zur Verfügung und wollen Zahlen in einem Intervall von $[0, 1000)$ abspeichern, was könnten wir tun?

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

Präzision von Kommazahlen (Übung 1.31)

- Angenommen, wir haben 20 bits zur Verfügung und wollen Zahlen in einem Intervall von $[0, 1000)$ abspeichern, was könnten wir tun?
- Wir haben 20 bits zur Verfügung, also können wir 2^{20} unterschiedliche Zahlen modellieren (ca. 1'000'000).

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

Präzision von Kommazahlen (Übung 1.31)

- Angenommen, wir haben 20 bits zur Verfügung und wollen Zahlen in einem Intervall von $[0, 1000)$ abspeichern, was könnten wir tun?
- Wir haben 20 bits zur Verfügung, also können wir 2^{20} unterschiedliche Zahlen modellieren (ca. 1'000'000).
- Problem: es gibt unendlich viele Zahlen zwischen 0 und 1000...

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

Präzision von Kommazahlen (Übung 1.31)

- Angenommen, wir haben 20 bits zur Verfügung und wollen Zahlen in einem Intervall von $[0, 1000)$ abspeichern, was könnten wir tun?
- Wir haben 20 bits zur Verfügung, also können wir 2^{20} unterschiedliche Zahlen modellieren (ca. 1'000'000).
- Problem: es gibt unendlich viele Zahlen zwischen 0 und 1000...
- Erste Lösungsidee: Wir teilen das Intervall $[0, 1000)$ in 1'000'000 gleich grosse Unter-Intervalle auf (also Schritte von 0.001, denn $0.001 \cdot 1000 = 1'000'000$).

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

Präzision von Kommazahlen (Übung 1.31)

- Angenommen, wir haben 20 bits zur Verfügung und wollen Zahlen in einem Intervall von $[0, 1000)$ abspeichern, was könnten wir tun?
- Wir haben 20 bits zur Verfügung, also können wir 2^{20} unterschiedliche Zahlen modellieren (ca. 1'000'000).
- Problem: es gibt unendlich viele Zahlen zwischen 0 und 1000...
- Erste Lösungsidee: Wir teilen das Intervall $[0, 1000)$ in 1'000'000 gleich grosse Unter-Intervalle auf (also Schritte von 0.001, denn $0.001 \cdot 1000 = 1'000'000$).
- Jede Zahl i stellen wir durch den Mittelwert des i-ten Intervalls dar.

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

Präzision von Kommazahlen (Übung 1.31)

- Angenommen, wir haben 20 bits zur Verfügung und wollen Zahlen in einem Intervall von $[0, 1000)$ abspeichern, was könnten wir tun?
- Wir haben 20 bits zur Verfügung, also können wir 2^{20} unterschiedliche Zahlen modellieren (ca. 1'000'000).
- Problem: es gibt unendlich viele Zahlen zwischen 0 und 1000...
- Erste Lösungsidee: Wir teilen das Intervall $[0, 1000)$ in 1'000'000 gleich grosse Unter-Intervalle auf (also Schritte von 0.001, denn $0.001 \cdot 1000 = 1'000'000$).
- Jede Zahl i stellen wir durch den Mittelwert des i-ten Intervalls dar.
- **Beispiel**:

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

Präzision von Kommazahlen (Übung 1.31)

- Angenommen, wir haben 20 bits zur Verfügung und wollen Zahlen in einem Intervall von $[0, 1000)$ abspeichern, was könnten wir tun?
- Wir haben 20 bits zur Verfügung, also können wir 2^{20} unterschiedliche Zahlen modellieren (ca. 1'000'000).
- Problem: es gibt unendlich viele Zahlen zwischen 0 und 1000...
- Erste Lösungsidee: Wir teilen das Intervall $[0, 1000)$ in 1'000'000 gleich grosse Unter-Intervalle auf (also Schritte von 0.001, denn $0.001 \cdot 1000 =$ 1'000'000).
- Jede Zahl i stellen wir durch den Mittelwert des i-ten Intervalls dar.
- **Beispiel**:
  - Alle Zahlen zwischen $[0.001, 0.002)$ werden durch 0.0015 dargestellt (=Mittelwert)

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

Präzision von Kommazahlen (Übung 1.31)

- Angenommen, wir haben 20 bits zur Verfügung und wollen Zahlen in einem Intervall von $[0, 1000)$ abspeichern, was könnten wir tun?
- Wir haben 20 bits zur Verfügung, also können wir 2^{20} unterschiedliche Zahlen modellieren (ca. 1'000'000).
- Problem: es gibt unendlich viele Zahlen zwischen 0 und 1000...
- Erste Lösungsidee: Wir teilen das Intervall $[0, 1000)$ in 1'000'000 gleich grosse Unter-Intervalle auf (also Schritte von 0.001, denn $0.001 \cdot 1000 =$ 1'000'000).
- Jede Zahl i stellen wir durch den Mittelwert des i-ten Intervalls dar.
- **Beispiel**:
  - Alle Zahlen zwischen $[0.001, 0.002)$ werden durch 0.0015 dargestellt (=Mittelwert)
  - Alle Zahlen zwischen $[999.999, 1000)$ werden durch 999.9995 dargestellt (=Mittelwert)

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

Präzision von Kommazahlen (Übung 1.31)

- Angenommen, wir haben 20 bits zur Verfügung und wollen Zahlen in einem Intervall von $[0, 1000)$ abspeichern, was könnten wir tun?
- Wir haben 20 bits zur Verfügung, also können wir 2^{20} unterschiedliche Zahlen modellieren (ca. 1'000'000).
- Problem: es gibt unendlich viele Zahlen zwischen 0 und 1000...
- Erste Lösungsidee: Wir teilen das Intervall $[0, 1000)$ in 1'000'000 gleich grosse Unter-Intervalle auf (also Schritte von 0.001, denn $0.001 \cdot 1000 = 1'000'000$).
- Jede Zahl i stellen wir durch den Mittelwert des i-ten Intervalls dar.
- **Beispiel**:
  - Alle Zahlen zwischen $[0.001, 0.002)$ werden durch 0.0015 dargestellt (=Mittelwert)
  - Alle Zahlen zwischen $[999.999, 1000)$ werden durch 999.9995 dargestellt (=Mittelwert)
- Somit beträgt der absolute Fehler jeder Zahl maximal 0.0005.

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

- ***Problem***: Der relative Darstellungsfehler kann riesig sein.

$$\text{Relativer Darstellungsfehler} = \frac{|\text{Wert der Darstellung - Zahl}|}{\text{Zahl}}$$

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

- ***Problem***: Der relative Darstellungsfehler kann riesig sein.

$$\text{Relativer Darstellungsfehler} = \frac{|\text{Wert der Darstellung - Zahl}|}{\text{Zahl}}$$

- Wert der Darstellung: 0.0015, echte Zahl: 0.001.

$$\frac{\overbrace{|0.0015 - 0.001|}^{=0.0005}}{0.001} = 50\%!$$

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

- ***Problem***: Der relative Darstellungsfehler kann riesig sein.

$$\text{Relativer Darstellungsfehler} = \frac{|\text{Wert der Darstellung - Zahl}|}{\text{Zahl}}$$

- Wert der Darstellung: 0.0015, echte Zahl: 0.001.

$$\frac{\overbrace{|0.0015 - 0.001|}^{=0.0005}}{0.001} = 50\%!$$

- Wert der Darstellung: 999.9995, echte Zahl: 999.999.

$$\frac{\overbrace{|999.9995 - 999.999|}^{=0.0005}}{999.999} = \text{ca. } 0.00005\%!$$

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

- ***Problem***: Der relative Darstellungsfehler kann riesig sein.

$$\text{Relativer Darstellungsfehler} = \frac{|\text{Wert der Darstellung - Zahl}|}{\text{Zahl}}$$

- Wert der Darstellung: 0.0015, echte Zahl: 0.001.

$$\frac{\overbrace{|0.0015 - 0.001|}^{=0.0005}}{0.001} = 50\%!$$

- Wert der Darstellung: 999.9995, echte Zahl: 999.999.

$$\frac{\overbrace{|999.9995 - 999.999|}^{=0.0005}}{999.999} = \text{ca. } 0.00005\%!$$

- Allgemein sehen wir, dass der relative Fehler in diesem Fall lediglich von der Zahl abhängt:

$$\text{Relativer Darstellungsfehler} = \frac{\overbrace{0.0005}^{\text{Absoluter Darstellungsfehler}}}{\text{Zahl}}$$

Stellenwertdarstellung von Kommazahlen

- ***Problem***: Der relative Darstellungsfehler kann riesig sein.

$$\text{Relativer Darstellungsfehler} = \frac{|\text{Wert der Darstellung - Zahl}|}{\text{Zahl}}$$

- Wert der Darstellung: 0.0015, echte Zahl: 0.001.

$$\frac{\overbrace{|0.0015 - 0.001|}^{=0.0005}}{0.001} = 50\%!$$

- Wert der Darstellung: 999.9995, echte Zahl: 999.999.

$$\frac{\overbrace{|999.9995 - 999.999|}^{=0.0005}}{999.999} = \text{ca. } 0.00005\%!$$

- Allgemein sehen wir, dass der relative Fehler in diesem Fall lediglich von der Zahl abhängt:

$$\text{Relativer Darstellungsfehler} = \frac{\overbrace{0.0005}^{\text{Absoluter Darstellungsfehler}}}{\text{Zahl}}$$

- Wir möchten aber unabhängig von der Zahl einigermassen genau rechnen können...

Lösungsansatz

Weitere Illustration (20 bits):

- 110111001001011.00101_2
- 1101110.0100101100101_2
- $11.0111001001011001 01_2$

Der rote Teil ist mit dem obigen Ansatz „präzise“ dargestellt, dar blaue nicht. Erkennen Sie das Problem dieses Ansatzes?

- Wie wir intuitiv sehen, müssen lange Zahlen gar nicht so genau sein. Bei einer Zahl wie „1’000’000’000“ (eine Milliarde) ist es weniger wichtig, sie auf mehrere Nachkommastellen genau abzubilden, als bei einer Zahl wie „0.0034551“.
- Wenn wir eine ähnliche relative Genauigkeit für Zahlen unterschiedlicher Grössenordnungen wollen, müssen wir für kleinere Zahlen „genauer“ sein als für grosse.
- Analogie: 🍞
  - 🪚 Dicke Stücke können wir einer stumpfen Säge schneiden
  - 🔪 Für hauchdünne Stücke brauchen wir ein fein geschliffenes Messer (Aufteilung des Brotes in feinere Stücke / „Intervalle“)

Lösungsansatz (siehe Übung 1.32)

- ***Lösungsidee***: Statt die Intervalle immer gleich gross zu machen, machen die Unterteilung feiner für kleinere Zahlen, und grösser für grössere Zahlen

Lösungsansatz (siehe Übung 1.32)

- ***Lösungsidee***: Statt die Intervalle immer gleich gross zu machen, machen die Unterteilung feiner für kleinere Zahlen, und grösser für grössere Zahlen

---

Betrachten Sie folgende Zahlen. Wie lassen sich diese Zahlen neu schreiben, um ähnliche Genauigkeit beim Abspeichern zu haben?

1. 1003030401.003
2. 34034.11100345
3. 9.349995613496

Lösungsansatz (siehe Übung 1.32)

- ***Lösungsidee***: Statt die Intervalle immer gleich gross zu machen, machen die Unterteilung feiner für kleinere Zahlen, und grösser für grössere Zahlen

---

Betrachten Sie folgende Zahlen. Wie lassen sich diese Zahlen neu schreiben, um ähnliche Genauigkeit beim Abspeichern zu haben?

1. $1003030401.003 \rightarrow 10^9 \cdot 1.003030401003$
2. $34034.11100345 \rightarrow 10^4 \cdot 3.403411100345$
3. $9.349995613496 \rightarrow 10^0 \cdot 9.349995613496$

$\rightarrow$***Normalisierte (wissenschaftliche) Darstellung***

Lösungsansatz (siehe Übung 1.32)

- Angenommen, wir wollen Zahlen zwischen 0 und 10 darstellen. Wir sagen, dass Zahlen kleiner als 10^{-31} (also $< 0.000\ldots0001$) als 0 dargestellt werden.

Lösungsansatz (siehe Übung 1.32)

- Angenommen, wir wollen Zahlen zwischen 0 und 10 darstellen. Wir sagen, dass Zahlen kleiner als 10^{-31} (also $< 0.000\ldots0001$) als 0 dargestellt werden.
- Wir haben für also $32 = 2^5$ Intervalle bezüglich 10er-Potenzen:

$$=[10^{-31},10^{-30}), \quad [10^{-30},10^{-29}),\ldots, \quad \underbrace{[10^{-2},10^{-1})}_{=[0.01,0.1)}, \underbrace{[10^{-1},10^{0})}_{=[0.1,1)}, \quad \underbrace{[10^{0},10^{1})}_{=[1,10)}$$

Lösungsansatz (siehe Übung 1.32)

- Angenommen, wir wollen Zahlen zwischen 0 und 10 darstellen. Wir sagen, dass Zahlen kleiner als 10^{-31} (also $< 0.000\dots0001$) als 0 dargestellt werden.
- Wir haben für also $32 = 2^5$ Intervalle bezüglich 10er-Potenzen:

$$=[10^{-31},10^{-30}),\quad [10^{-30},10^{-29}),\ldots,\quad \underbrace{[10^{-2},10^{-1})}_{=[0.01,0.1)},\underbrace{[10^{-1},10^{0})}_{=[0.1,1)},\quad \underbrace{[10^{0},10^{1})}_{=[1,10)}$$

- Allgemein schreiben wir ein Intervall als $[10^i, 10^{i+1})$.

Lösungsansatz (siehe Übung 1.32)

- Angenommen, wir wollen Zahlen zwischen 0 und 10 darstellen. Wir sagen, dass Zahlen kleiner als 10^{-31} (also $< 0.000\ldots0001$) als 0 dargestellt werden.
- Wir haben für also $32 = 2^5$ Intervalle bezüglich 10er-Potenzen:

$$=[10^{-31}, 10^{-30}), \quad [10^{-30}, 10^{-29}), \ldots, \quad \underbrace{[10^{-2}, 10^{-1})}_{=[0.01,0.1)}, \underbrace{[10^{-1}, 10^{0})}_{=[0.1,1)}, \quad \underbrace{[10^{0}, 10^{1})}_{=[1,10)}$$

- Allgemein schreiben wir ein Intervall als $[10^i, 10^{i+1})$.
- Wir teilen jedes Intervall in gleich viele Unter-Intervalle auf, z.B. in Schritten von $0.01 \cdot 10^i$ (d.h. je 900 Unter-Intervalle pro Intervall)[1]. Dann beträgt der relative Fehler immer $\frac{0.005 \cdot 10^i}{10^i} = 0.005$ und ist somit nun unabhängig von der Zahl!

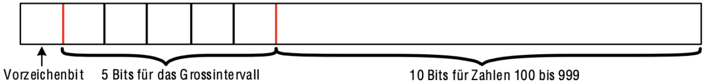
[1] Die Unter-Intervalle des grössten Intervalls sind beispielsweise: $[1.00, 1.01), [1.01, 1.02), [1.02, 1.03), \ldots, [9.98, 9.99), [9.99, 10.00)$

Lösungsansatz (siehe Übung 1.32)

- Angenommen, wir wollen Zahlen zwischen 0 und 10 darstellen. Wir sagen, dass Zahlen kleiner als 10^{-31} (also $< 0.000\ldots0001$) als 0 dargestellt werden.
- Wir haben für also $32 = 2^5$ Intervalle bezüglich 10er-Potenzen:

$$=[10^{-31},10^{-30}),\quad [10^{-30},10^{-29}),\ldots,\quad \underbrace{[10^{-2},10^{-1})}_{=[0.01,0.1)},\underbrace{[10^{-1},10^{0})}_{=[0.1,1)},\quad \underbrace{[10^{0},10^{1})}_{=[1,10)}$$

- Allgemein schreiben wir ein Intervall als $[10^i, 10^{i+1})$.
- Wir teilen jedes Intervall in gleich viele Unter-Intervalle auf, z.B. in Schritten von $0.01 \cdot 10^i$ (d.h. je 900 Unter-Intervalle pro Intervall)[1]. Dann beträgt der relative Fehler immer $\frac{0.005\cdot 10^i}{10^i} = 0.005$ und ist somit nun unabhängig von der Zahl!
- Umsetzung im Computer:



[1] Die Unter-Intervalle des grössten Intervalls sind beispielsweise: $[1.00, 1.01), [1.01, 1.02), [1.02, 1.03), \ldots, [9.98, 9.99), [9.99, 10.00)$

Übungen

- (Optional) lesen Sie die Lösungen von Übung 1.32
- Lesen Sie Beispiel 1.5
- 1.33