



FreeFlower

Informatik: Data Science und Sicherheit
Zahlensysteme 🖋️ : **Lektion 02**

Weshalb unterschiedliche Zahlensysteme?

- ▶ Zahlensysteme sind „willkürlich“ und historisch entstanden
- ▶ Computer arbeiten mit binären Zahlen $\{0,1\}$
 - ▶ Schnelleres Rechnen
 - ▶ ⚡ 1 = Strom fließt, 0 = kein Strom

Stellenwertdarstellung

Allgemeine Beobachtungen

- ▶ Buchstaben von „normalem“ Zahlensystem:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

- ▶ 10-adisches Zahlensystem, da 10 Zeichen
- ▶ Dezimalsystem (von lateinisch *decem* → „zehn“)
- ▶ Buchstaben von „binärem“ Zahlensystem:

$$\{0, 1\}$$

- ▶ 2-adisches Zahlensystem, da 2 Zeichen
- ▶ Binärsystem (von lateinisch *binarius* → „zweifach“)

Stellenwertdarstellung

Allgemeine Beobachtungen

- ▶ Da das dezimale Alphabet aus 10 Buchstaben besteht, können wir die Zahl 4605 zur Klarheit auch als 4605_{10} schreiben.

Dezimal ($\{0, 1, \dots, 9\}$)	Binär ($\{0, 1\}$)
0 (= 0_{10})	$?_2$
1 (= 1_{10})	$?_2$
2 (= 2_{10})	$?_2$
3 (= 3_{10})	$?_2$
4 (= 4_{10})	$?_2$
...	...

Stellenwertdarstellung

Allgemeine Beobachtungen

- ▶ Da das dezimale Alphabet aus 10 Buchstaben besteht, können wir die Zahl **4605** zur Klarheit auch als **4605₁₀** schreiben.

Dezimal ($\{0, 1, \dots, 9\}$)	Binär ($\{0, 1\}$)
0 (= 0 ₁₀)	0 ₂
1 (= 1 ₁₀)	1 ₂
2 (= 2 ₁₀)	10 ₂
3 (= 3 ₁₀)	11 ₂
4 (= 4 ₁₀)	100 ₂
...	...

Stellenwertdarstellung

Allgemeine Beobachtungen

- ▶ Da das dezimale Alphabet aus 10 Buchstaben besteht, können wir die Zahl **4605** zur Klarheit auch als **4605₁₀** schreiben.

Dezimal ($\{0, 1, \dots, 9\}$)	Binär ($\{0, 1\}$)
0 (= 0 ₁₀)	0 ₂
1 (= 1 ₁₀)	1 ₂
2 (= 2 ₁₀)	10 ₂
3 (= 3 ₁₀)	11 ₂
4 (= 4 ₁₀)	100 ₂
...	...

- ▶ Wie kann man Zahlen allgemein vom einen System in ein anderes Transformieren?
→ b -adische Zahlensysteme!

Stellenwertdarstellung und b -adische Systeme

- ▶ Das **Dezimalsystem** hat die Basisgrößen

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \dots$$

Beispiel: Das Wort 4605_{10} wird interpretiert als die Zahl

$$\underbrace{\dots}_{?} \underbrace{10^3}_{?} + \underbrace{\dots}_{?} \underbrace{10^2}_{?} + \underbrace{\dots}_{?} \underbrace{10^1}_{?} + \underbrace{\dots}_{?} \underbrace{10^0}_{?}.$$

Stellenwertdarstellung und b -adische Systeme

- ▶ Das **Dezimalsystem** hat die Basisgrößen

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \dots$$

Beispiel: Das Wort 4605_{10} wird interpretiert als die Zahl

$$\underbrace{\dots}_{?} \underbrace{10^3}_{1000} + \underbrace{\dots}_{?} \underbrace{10^2}_{100} + \underbrace{\dots}_{?} \underbrace{10^1}_{10} + \underbrace{\dots}_{?} \underbrace{10^0}_{1}.$$

Stellenwertdarstellung und b -adische Systeme

- ▶ Das **Dezimalsystem** hat die Basisgrößen

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \dots$$

Beispiel: Das Wort 4605_{10} wird interpretiert als die Zahl

$$\underbrace{a_3}_{?} \cdot \underbrace{10^3}_{1000} + \underbrace{a_2}_{?} \cdot \underbrace{10^2}_{100} + \underbrace{a_1}_{?} \cdot \underbrace{10^1}_{10} + \underbrace{a_0}_{?} \cdot \underbrace{10^0}_{1}.$$

Stellenwertdarstellung und b -adische Systeme

- ▶ Das **Dezimalsystem** hat die Basisgrößen

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \dots$$

Beispiel: Das Wort 4605_{10} wird interpretiert als die Zahl

$$4 \cdot \underbrace{10^3}_{1000} + 6 \cdot \underbrace{10^2}_{100} + 0 \cdot \underbrace{10^1}_{10} + 5 \cdot \underbrace{10^0}_1.$$

Stellenwertdarstellung und b -adische Systeme

- ▶ Das **Dezimalsystem** hat die Basisgrößen

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \dots$$

Beispiel: Das Wort 4605_{10} wird interpretiert als die Zahl

$$4 \cdot \underbrace{10^3}_{1000} + 6 \cdot \underbrace{10^2}_{100} + 0 \cdot \underbrace{10^1}_{10} + 5 \cdot \underbrace{10^0}_1.$$

=vier Tausender + sechs Hunderter + null Zehner + fünf Einer.

Stellenwertdarstellung und b -adische Systeme

- ▶ Das **Dezimalsystem** hat die Basisgrößen

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \dots$$

Beispiel: Das Wort 4605_{10} wird interpretiert als die Zahl

$$4 \cdot \underbrace{10^3}_{1000} + 6 \cdot \underbrace{10^2}_{100} + 0 \cdot \underbrace{10^1}_{10} + 5 \cdot \underbrace{10^0}_1.$$

=vier Tausender + sechs Hunderter + null Zehner + fünf Einer.

- ▶ Das **Binärsystem** hat die Basisgrößen

$$2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \dots$$

- ▶ Allgemein: Das **b -adische System** hat die Basisgrößen

$$b^0, \quad b^1, \quad b^2, \quad b^3, \dots$$

Stellenwertdarstellung

Übung

1. Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = a_3 \cdot \underbrace{10^3}_{=1000} + a_2 \cdot \underbrace{10^2}_{=100} + a_1 \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + a_0 \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

Stellenwertdarstellung

Übung

- Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = \overset{=a_3}{\cancel{0}} \cdot \underbrace{\cancel{10^3}}_{=1000} + \overset{=a_2}{\cancel{0}} \cdot \underbrace{\cancel{10^2}}_{=100} + \overset{=a_1}{2} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overset{=a_0}{9} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

Stellenwertdarstellung

Übung

- Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = \overset{=a_3}{\cancel{0}} \cdot \underbrace{\cancel{10^3}}_{=1000} + \overset{=a_2}{\cancel{0}} \cdot \underbrace{\cancel{10^2}}_{=100} + \overset{=a_1}{2} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overset{=a_0}{9} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

- Wandeln Sie die Zahl vom 10-adischen ins 2-adische System um (also von dezimal zu binär)

$$29_{10} = ?_2$$

Stellenwertdarstellung

Übung

- Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = \overbrace{0}^{=a_3} \cdot \underbrace{10^3}_{=1000} + \overbrace{0}^{=a_2} \cdot \underbrace{10^2}_{=100} + \overbrace{2}^{=a_1} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overbrace{9}^{=a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

- Wandeln Sie die Zahl vom 10-adischen ins 2-adische System um (also von dezimal zu binär)

$$a_4 \cdot \underbrace{2^4}_{=?} + a_3 \cdot \underbrace{2^3}_{=?} + a_2 \cdot \underbrace{2^2}_{=?} + a_1 \cdot \underbrace{2^1}_{=?} + a_0 \cdot \underbrace{2^0}_{=?}.$$

Stellenwertdarstellung

Übung

- Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = \overbrace{0}^{=a_3} \cdot \underbrace{10^3}_{=1000} + \overbrace{0}^{=a_2} \cdot \underbrace{10^2}_{=100} + \overbrace{2}^{=a_1} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overbrace{9}^{=a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

- Wandeln Sie die Zahl vom 10-adischen ins 2-adische System um (also von dezimal zu binär)

$$a_4 \cdot \underbrace{2^4}_{=16} + a_3 \cdot \underbrace{2^3}_{=8} + a_2 \cdot \underbrace{2^2}_{=4} + a_1 \cdot \underbrace{2^1}_{=2} + a_0 \cdot \underbrace{2^0}_{=1}.$$

Stellenwertdarstellung

Übung

- Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = \overbrace{0}^{=a_3} \cdot \underbrace{10^3}_{=1000} + \overbrace{0}^{=a_2} \cdot \underbrace{10^2}_{=100} + \overbrace{2}^{=a_1} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overbrace{9}^{=a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

- Wandeln Sie die Zahl vom 10-adischen ins 2-adische System um (also von dezimal zu binär)

$$\overbrace{1}^{=a_4} \cdot \underbrace{2^4}_{=16} + \overbrace{1}^{=a_3} \cdot \underbrace{2^3}_{=8} + \overbrace{1}^{=a_2} \cdot \underbrace{2^2}_{=4} + \overbrace{0}^{=a_1} \cdot \underbrace{2^1}_{=2} + \overbrace{1}^{=a_0} \cdot \underbrace{2^0}_{=1}.$$

Stellenwertdarstellung

Übung

- Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = \overbrace{0}^{=a_3} \cdot \underbrace{10^3}_{=1000} + \overbrace{0}^{=a_2} \cdot \underbrace{10^2}_{=100} + \overbrace{2}^{=a_1} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overbrace{9}^{=a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

- Wandeln Sie die Zahl vom 10-adischen ins 2-adische System um (also von dezimal zu binär)

$$\overbrace{1}^{=a_4} \cdot \underbrace{2^4}_{=16} + \overbrace{1}^{=a_3} \cdot \underbrace{2^3}_{=8} + \overbrace{1}^{=a_2} \cdot \underbrace{2^2}_{=4} + \overbrace{0}^{=a_1} \cdot \underbrace{2^1}_{=2} + \overbrace{1}^{=a_0} \cdot \underbrace{2^0}_{=1}.$$

- Das Resultat ist also 11101_2

Stellenwertdarstellung

Übung

- Wir wollen die dezimale („normale“) Zahl 29_{10} in das binäre System umwandeln:

$$29_{10} = \overbrace{0}^{=a_3} \cdot \underbrace{10^3}_{=1000} + \overbrace{0}^{=a_2} \cdot \underbrace{10^2}_{=100} + \overbrace{2}^{=a_1} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overbrace{9}^{=a_0} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

- Wandeln Sie die Zahl vom 10-adischen ins 2-adische System um (also von dezimal zu binär)

$$\overbrace{1}^{=a_4} \cdot \underbrace{2^4}_{=16} + \overbrace{1}^{=a_3} \cdot \underbrace{2^3}_{=8} + \overbrace{1}^{=a_2} \cdot \underbrace{2^2}_{=4} + \overbrace{0}^{=a_1} \cdot \underbrace{2^1}_{=2} + \overbrace{1}^{=a_0} \cdot \underbrace{2^0}_{=1}.$$

- Das Resultat ist also 11101_2
- Man nennt dieses Verfahren **greedy** („gierig“)

Aufgaben

Skript „Zahlensysteme und Kodierungen“ (auf Moodle)



Aufgaben 1.3 - 1.5

Stellenwertdarstellung

Verallgemeinerung

Seien $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ natürliche Zahlen. Dann stellt das Wort

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

(definitionsgemäss) die Zahl

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

dar.

$$\text{Beispiel : } 4605 = \overset{=a_3}{4} \cdot \underbrace{10^3}_{=1000} + \overset{=a_2}{6} \cdot \underbrace{10^2}_{=100} + \overset{=a_1}{0} \cdot \underbrace{10^1}_{=10} + \overset{=a_0}{5} \cdot \underbrace{10^0}_{=1}.$$

Stellenwertdarstellung

Verallgemeinerung

Allgemein repräsentiert das Wort

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

in der b -adischen Darstellung (Basisgrösse b) die Zahl

$$a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0.$$

Beispiel für $b = 3$

- ▶ Buchstaben = $\{0, 1, 2\}$
- ▶ Die Zahl 23_{10} wird folgendermassen in das 3-adische System übersetzt:

$$23_{10} = \underbrace{\overbrace{2}^{=a_2} \cdot \underbrace{3^2}_9}_{18} + \underbrace{\overbrace{1}^{=a_1} \cdot \underbrace{3^1}_3}_3 + \underbrace{\overbrace{2}^{=a_0} \cdot \underbrace{3^0}_1}_2.$$

Ziffern

Die (nicht notwendigerweise verschiedenen) natürlichen Zahlen $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ werden **Ziffern** genannt.

Wichtige Beobachtung zu Ziffern

Eine kürzeste Darstellung im b -adischen System ist immer ein Wort über dem Alphabet

$$\{0, 1, 2, \dots, b - 1\}.$$

Die höchste mögliche (sinnvolle) Ziffer ist also $b - 1$ (zum Beispiel ist $9 = 10 - 1$ die grösste Ziffer im Zehnersystem oder $1 = 2 - 1$ die grösste Ziffer im Binärsystem).

Skript „Zahlensysteme und Kodierungen“ (auf Moodle)



Aufgaben 1.7-1.10



Challenge: Aufgaben 1.8

Appendix

Definitionen

Alphabete und Buchstaben

- ▶ **Alphabet** = endliche, nicht leere Menge von Zeichen zur Informationsdarstellung

Definitionen

Alphabete und Buchstaben

- ▶ **Alphabet** = endliche, nicht leere Menge von Zeichen zur Informationsdarstellung
- ▶ **Buchstaben** = Elemente eines Alphabets

Definitionen

Alphabete: Beispiele

- ▶ Das lateinische Alphabet:

$\{A, B, C, \dots, Z\}$

Definitionen

Alphabete: Beispiele

- ▶ Das lateinische Alphabet:

$$\{A, B, C, \dots, Z\}$$

- ▶ Das Alphabet der Tastatur:

$$\{a, b, c, \dots, z, A, B, C, \dots, Z, \square, >, <, (,), \dots, \#, ?, !\}$$

Definitionen

Alphabete: Beispiele

- ▶ Das lateinische Alphabet:

$$\{A, B, C, \dots, Z\}$$

- ▶ Das Alphabet der Tastatur:

$$\{a, b, c, \dots, z, A, B, C, \dots, Z, \square, >, <, (,), \dots, \#, ?, !\}$$

- ▶ Das binäre Alphabet:

$$\{0, 1\}$$

Definitionen

Wörter

- ▶ **Wort** über ein Alphabet A = eine beliebige endliche Folge von Buchstaben aus A .

Definitionen

Wörter

- ▶ **Wort** über ein Alphabet A = eine beliebige endliche Folge von Buchstaben aus A .
- ▶ **Länge eines Words** = die Anzahl der Buchstaben in diesem Wort.

Definitionen

Wörter

- ▶ **Wort** über ein Alphabet A = eine beliebige endliche Folge von Buchstaben aus A .
- ▶ **Länge eines Words** = die Anzahl der Buchstaben in diesem Wort.
- ▶ Z.B: 0, 1, 1, 1, 0, 1 = ein Wort der Länge 6 über dem binären Alphabet.

Wörter

- ▶ Kommas werden bei Wörtern weggelassen (011101 anstelle von 0, 1, 1, 1, 0, 1)

Wörter

- ▶ Kommas werden bei Wörtern weggelassen (011101 anstelle von 0, 1, 1, 1, 0, 1)
- ▶ *GLKK* = Wort der Länge 4 über dem lateinischen Alphabet.

Wörter

- ▶ Kommas werden bei Wörtern weggelassen (011101 anstelle von 0, 1, 1, 1, 0, 1)
- ▶ *GLKK* = Wort der Länge 4 über dem lateinischen Alphabet.
- ▶ Ist *uh01* ein Wort über dem binären Alphabet?